Espaces vectoriels

Cours de É. Bouchet – PCSI

5 janvier 2026

Table des matières

Les espaces vectoriels introduisent un langage commun pour des situations a priori différentes (fonctions, polynômes, suites, matrices, …). Ils permettent de résoudre avec la même méthode des problèmes de domaines différents. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et propriétés

Définition 1.1 (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble non vide, muni d'une addition interne $+ :\ E \times E \to E$ et d'une multiplication externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** lorsque :

- L'opération interne $+$ vérifie les propriétés suivantes :
  - pour tout $(x, y) \in E^2$, $x + y = y + x$ (la loi $+$ est *commutative*),
  - pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (la loi $+$ est *associative*),
  - il existe un unique $e \in E$ appelé **élément neutre** tel que pour tout $x \in E$, $x + e = x = e + x$.
  - pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $x + x' = e = x' + x$. Cet élément est unique, appelé **opposé** de x, et noté $-x$.
- L'opération externe $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :
  - pour tout $x \in E$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
  - pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
  - pour tout $x \in E$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
  - pour tout $x \in E$, $1 \cdot x = x$

On appelle **vecteurs** les éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

Exemple. Les règles de calcul sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ donnent directement que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$:

- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit $x + y$ comme $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une opération interne dans $\mathbb{R}^2$, qui vérifie les propriétés :
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,
    $(x+y)+z = (x_1+y_1, x_2+y_2)+(z_1, z_2) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2) = (x_1, x_2)+(y_1+z_1, y_2+z_2) = x+(y+z)$.
  - il existe un élément $e = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x + e = x = e + x$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe $x' = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + x' = e = x' + x$.
- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\alpha \cdot x$ comme $(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une multiplication externe, qui vérifie les propriétés :
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,
    $(\alpha + \beta) \cdot x = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
    $\alpha \cdot (x + y) = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = (\alpha\beta) \cdot x$.
  - pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $1 \cdot x = (x_1, x_2) = x$.

Donc $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple. L'ensemble des vecteurs de l'espace, muni de l'addition de deux vecteurs et de la multiplication d'un réel par un vecteur, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Son élément neutre est le vecteur nul.

Remarque. Le symbole de l'opération externe $\cdot$ est parfois omis. Qu'il soit présent ou pas, il faut toujours placer le scalaire à gauche du vecteur.

Remarque. L'élément neutre pour $+$ est souvent noté 0_E, ou 0 lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

Proposition 1.2 (Cas d'un produit valant 0_E)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda \cdot x = (0, 0) \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = (0, 0)$.

Proposition 1.3 (Construction de l'opposé)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors pour tout $x \in E$, $-x = (-1) \cdot x$, où $-x$ est l'opposé de x dans E.

1.2 Espaces vectoriels de référence

Pour montrer les résultats qui suivent, on vérifie mécaniquement toutes les propriétés.

Proposition 1.4 ($\mathbb{K}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Muni des opérations usuelles, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $\mathbb{K}^n$ est le n-uplet $(0, ..., 0)$.

Proposition 1.5 ($\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Muni de l'addition de deux matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle de taille $n \times p$.

Proposition 1.6 ($\mathbb{K}[X]$)

Muni de l'addition de deux polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un scalaire, $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul.

Proposition 1.7 ($E \times F$)

Soit E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Muni des opérations usuelles, le produit cartésien $E \times F$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $E \times F$ est $(0_E, 0_F)$.

Proposition 1.8 ($\mathcal{F}(\Omega, F)$)

Soit Ω un ensemble non vide et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Muni des opérations usuelles, l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, F)$ des applications de Ω dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. L'élément neutre de $\mathcal{F}(\Omega, F)$ est l'application nulle de Ω dans F (l'application qui à tout élément de Ω associe 0_F).

Remarque. Ω n'a pas besoin d'être un espace vectoriel pour que le résultat soit valide.

Exemple. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son élément neutre est la suite nulle.

Exemple. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{K}^A$ des applications de A dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son élément neutre est la fonction nulle.

1.3 Combinaison linéaire

Définition 1.9 (Famille finie de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une **famille finie de vecteurs** de E lorsque tous les e_i appartiennent à E.

Exemple. $(1, 0)$, $(0, 1, 3)$ et $(1, 2, 2, 4)$ sont trois familles finies de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$.
$((1, 0), (2, 3), (2, 1))$ est une famille finie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.10 (Combinaison linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une famille finie de vecteurs de E et $x \in E$. On dit que x est **combinaison linéaire** des vecteurs de $\mathcal{S}$ lorsqu'il existe p scalaires $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k.$$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Alors il existe des scalaires $(a_0, ..., a_n)$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, donc P est combinaison linéaire de $(1, X, ..., X^n)$.

Exercice 1. Montrer que $(4, 13)$ est combinaison linéaire de $((1, 5), (2, 3))$.

Exercice 2. Montrer que $(1, 1)$ n'est pas combinaison linéaire de $((0, 0), (0, 1), (0, 2))$.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et caractérisation

Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E stable par combinaison linéaire. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E lorsque $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. Dire que F est stable par combinaison linéaire signifie que toute combinaison linéaire d'éléments de F appartient à F.

Exemple. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0_E\}$ (sous-espace nul) et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Proposition 2.2 (Cas de l'élément neutre)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $0_E \in F$.

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'unicité de l'élément neutre donne donc $0_F = 0_E$.

Proposition 2.3 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Alors :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \iff \quad 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (\alpha \cdot x) + y \in F.$$

Remarque. Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, revenir à la définition est peu pratique. Il est beaucoup plus rapide de montrer par la caractérisation ci-dessus que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble E des suites réelles convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 4. Montrer que l'ensemble D des suites réelles divergentes n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 5. L'ensemble E' des fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $f(0) = 0$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 2.4 (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. Ce résultat se généralise à l'intersection de plus de deux sous-espaces vectoriels.

Remarque. Attention : de manière générale, la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est PAS un sous-espace vectoriel de E.

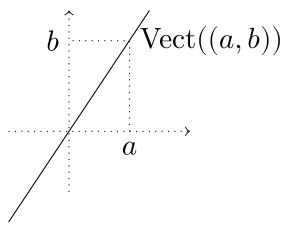
Exercice 7. $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{0\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Définition 2.5 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{S} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille finie de vecteurs de E. On note $\text{Vect}(\mathcal{S})$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{S}$.
$\text{Vect}(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $\mathcal{S}$.

Exemple. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\text{Vect}((a, b))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ appelé droite vectorielle :



Exemple. Soit (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$. Alors $\text{Vect}((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, appelé plan vectoriel.

Exemple. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\operatorname{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (qui forme donc un espace vectoriel).

Exercice 8. Montrer que $\operatorname{Vect}((1,2),(1,0)) = \mathbb{R}^2$.

Proposition 2.6 (Sous-espace contenant une famille)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{S} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille finie de vecteurs de E. Tout sous-espace vectoriel de E contenant les e_i contient $\operatorname{Vect}(\mathcal{S})$.

Proposition 2.7 (Cas d'un vecteur combinaison linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{S}$ une famille finie de vecteurs de E. Si $x \in \mathcal{S}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{S}$, alors $\operatorname{Vect}(\mathcal{S}) = \operatorname{Vect}(\mathcal{S}')$, où $\mathcal{S}'$ est la famille obtenue en retirant x à $\mathcal{S}$.

Exemple. $(3,6) = 3(1,2)$, donc $\operatorname{Vect}((1,2),(3,6)) = \operatorname{Vect}((1,2)) = \{(\lambda, 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3 Familles finies de vecteurs

3.1 Familles génératrices

Définition 3.1 (Famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{S}$ une famille finie d'éléments de E. La famille $\mathcal{S}$ est dite **génératrice** de E lorsque $\operatorname{Vect}(\mathcal{S}) = E$.

Remarque. L'inclusion $\operatorname{Vect}(\mathcal{S}) \subset E$ est évidente. Pour prouver que $\mathcal{S}$ est génératrice de E, il suffit donc de montrer que $E \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{S})$, c'est-à-dire de montrer que tout $x \in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{S}$.

Exemple. Si $P(X) \in \mathbb{K}_2[X]$, alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$. Les vecteurs X^2, X et 1 sont bien dans $\mathbb{K}_2[X]$, donc $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 9. La famille $((1,0),(1,1))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10. La famille $((1,0))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2y\}$. Montrer que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on déterminera une famille génératrice.

Proposition 3.2 (Famille contenant une famille génératrice)

Toute famille de vecteurs qui contient une famille génératrice de l'espace vectoriel E est une famille génératrice de l'espace vectoriel E.

Proposition 3.3 (Cas d'un élément combinaison linéaire des autres)

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{S}$ est une famille génératrice de E. Si $x \in \mathcal{S}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{S}$, alors la famille $\mathcal{S}'$ obtenue en retirant x à $\mathcal{S}$ est aussi génératrice de E.

3.2 Familles libres

Définition 3.4 (Famille libre, famille liée)

Une famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de l'espace vectoriel E est dite **libre** lorsque pour tout p-uplet $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de scalaires de $\mathbb{K}^p$,

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E \Longrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], \quad \alpha_k = 0.$$

On dit alors que les vecteurs e_1, e_2, ..., e_p sont **linéairement indépendants**. Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Remarque. Si $x \in E$ et $x \neq 0_E$, alors la famille (x) est libre.

Remarque. Pour montrer qu'une famille est libre, on fixe $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$, on suppose que $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E$ et on cherche à en déduire que tous les α_i sont nuls.

Exercice 12. Montrer que la famille $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$ obtenue précédemment est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13. Montrer que $((1, 2), (3, 6))$ est une famille liée.

Proposition 3.5 (Unicité de la décomposition dans une famille libre)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E est libre si et seulement si pour tous scalaires α_1, α_2, ..., α_p, β_1, β_2, ... , β_p de $\mathbb{K}$, $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum\limits_{k=1}^{p} \beta_k e_k \Longrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_k = \beta_k$.

Remarque. La liberté d'une famille permet donc d'identifier les coefficients dans une égalité.

Exercice 14. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$. La famille (f, g) est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions réelles ?

Exercice 15. Montrer que la famille $(X + 2, X + 1, X^2)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 3.6 (Famille de polynômes échelonnée en degré)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si la famille est **échelonnée en degré** (c'est-à-dire si $0 \leqslant \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$), alors elle est libre.

Exemple. La famille $(1, (X + 1)^5, (X - 2)^7)$ est échelonnée en degrés, donc libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 3.7 (Sous-famille d'une famille libre)

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Proposition 3.8 (Cas d'un vecteur combinaison linéaire des autres)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Remarque. En particulier toute famille qui contient l'élément neutre est liée, car si $e_1 = 0_E$, $e_1 = 0e_2 + \dots + 0e_p$.

Remarque. Si on ajoute à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ses éléments, on obtient donc une nouvelle famille libre.

Exercice 16. La famille $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 1, 1))$ est-elle libre ?

3.3 Bases

Définition 3.9 (Base, coordonnées)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une **base** de E lorsque tout vecteur x de E peut s'écrire d'une manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, ..., e_p.
On appelle alors **coordonnées** de x les coefficients de cette combinaison linéaire.

Exemple. $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et les coefficients de $1+3X^2$ dans cette base sont 1, 0 et 3.

Proposition 3.10 (Caractérisation des bases)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille finie d'éléments de E est une base de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Exercice 17. Dans $\mathbb{K}^n$, on pose $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, ..., $e_k = (0, ..., \underbrace{1}_{k\text{ème position}}, ..., 0)$, ... , $e_n = (0, ..., 0, 1)$. Montrer que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ forme une base de $\mathbb{K}^n$.

Remarque. Plusieurs ensembles usuels ont des bases « naturelles », appelées **bases canoniques** :

Espace vectoriel	Base canonique associée
$\mathbb{K}^n$	$((1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ...(0, ..., 0, 1))$
$\mathbb{K}_n[X]$	$(1, X, X^2, ..., X^n)$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	$(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$

On rappelle que $E_{i,j}$ désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui placé à la i-ème ligne et j-ième colonne, qui vaut 1.

Exemple. La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 18. Soit E l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. En déterminer une base.

4 Somme de sous-espaces vectoriels

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition 4.1 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble des éléments de E s'écrivant sous la forme de la somme d'un élément de F et d'un élément de G est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme des sous-espaces vectoriels** F et G. On note $F + G = \{x + y | (x, y) \in F \times G\}$.

Proposition 4.2 (Somme d'espaces vectoriels engendrés)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ deux familles finies d'éléments de E. On note $\mathcal{S}$ la famille qui juxtapose les vecteurs de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. Alors $\text{Vect}(\mathcal{S}_1) + \text{Vect}(\mathcal{S}_2) = \text{Vect}(\mathcal{S})$.

Remarque. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on obtient donc une famille génératrice de $F + G$ en juxtaposant des familles génératrices de F et de G.

Exercice 19. On se place dans $\mathbb{R}[X]$. Que vaut $\mathbb{R}_1[X] + \text{Vect}(X^2)$?

Définition 4.3 (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F+G$ est une **somme directe** lorsque tout élément u de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = x+y$, avec $(x,y) \in F \times G$. La somme est alors notée $F \oplus G$.

Remarque. La définition de $F+G$ donne l'existence de cette décomposition, il suffit donc de montrer l'unicité pour conclure que la somme est directe.

Proposition 4.4 (Caractérisation des sommes directes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $F+G$ est une somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Remarque. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a toujours $\{0_E\} \subset F \cap G$. Il suffit donc de montrer que $F \cap G \subset \{0_E\}$ pour montrer qu'une somme est directe.

Exercice 20. Montrer que la somme $\mathbb{R}_1[X] + \mathrm{Vect}(X^2)$ est directe.

4.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 4.5 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)

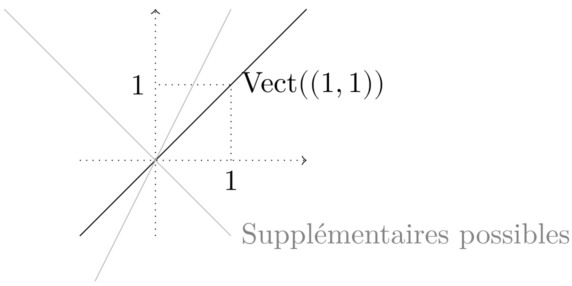
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.

Remarque. Un même espace vectoriel peut avoir plusieurs supplémentaires différents.

Remarque. Des méthodes pratiques de construction de supplémentaire seront étudiées dans un prochain chapitre.

Exemple. $\mathrm{Vect}(X^2)$ et $\mathrm{Vect}(X^2+1)$ sont deux supplémentaires de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$
(on a montré $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^2)$ dans l'exercice 20, l'égalité $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \mathrm{Vect}(X^2+1)$ s'établit de la même manière).

Exemple. Les supplémentaires d'une droite du plan passant par 0 sont toute autre droite du plan passant par 0. Par exemple, les supplémentaires de $\mathrm{Vect}((1,0))$ dans $\mathbb{R}^2$ sont les ensembles de la forme $\mathrm{Vect}((a,b))$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.



Exemple. Les supplémentaires d'un plan P de $\mathbb{R}^3$ passant par 0 sont toute droite du plan passant par 0 et non incluse dans le plan P.

Exercice 21. Soit n un entier naturel non nul, on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.