

**Exercice 1 (★).** Les ensembles suivants munis des opérations usuelles sont-ils des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  ?

1.  $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y - z = 0\}$ .
2.  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2 \text{ et } z = 2x\}$ .
3.  $E_3$  est l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $2f(-1) = f(1)$ .
4.  $E_4 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \sin(x) + b \cos(x)\}$ .
5.  $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ .
6.  $E_6$  est l'ensemble des fonctions  $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  solutions de  $y' + e^{-t}y = 0$ .

**Exercice 2 (★).** Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel :

1. L'ensemble  $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4y = 0\}$ .
2. L'ensemble  $F_2$  des suites réelles qui divergent vers  $+\infty$ .
3. L'ensemble  $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ .
4. L'ensemble  $F_4$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f(0) = f(1)$ .
5. L'ensemble  $F_5 = \{(2x, y + 1, -x + y) \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .
6. L'ensemble  $F_6$  des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  de degré exactement 5.

**Exercice 3 (★).** Les familles suivantes sont-elles libres dans leurs espaces vectoriels de référence respectifs ?

1.  $(e_1, e_2, e_3)$  avec  $e_1 = (5, -2, -3)$ ,  $e_2 = (4, 1, -3)$  et  $e_3 = (-2, 6, 1)$ .
2.  $(h_0, h_1, h_2)$  où ces trois fonctions sont définies sur  $\mathbb{R}$  par  $h_0 : x \mapsto 1$ ,  $h_1 : x \mapsto e^x$  et  $h_2 : x \mapsto e^{2x}$ .
3.  $(u, v)$  avec  $u = (10, -5, 15)$ ,  $v = (-4, 2, -6)$ .

**Exercice 4 (★).** Soit  $u, v$  et  $w$  trois suites réelles définies pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = 2^n$ ,  $v_n = 3^n$  et  $w_n = 4^n$ .

1. La famille  $(u, w)$  est-elle libre dans  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$  ?
2. La famille  $(u, v, w)$  est-elle libre dans  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$  ?

**Exercice 5 (★★).** Dans  $\mathbb{C}_3[X]$ , on donne  $P_0(X) = 1 - iX$ ,  $P_1(X) = 1 + X^2$  et  $P_2(X) = iX - X^3$ . La famille  $(P_0, P_1, P_2)$  est-elle une famille libre dans  $\mathbb{C}_3[X]$  ? génératrice de  $\mathbb{C}_3[X]$  ?

**Exercice 6 (★★).** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Dans l'espace vectoriel  $C(\mathbb{R})$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on donne  $f_0 : x \mapsto 1$  et pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $f_k : x \mapsto \cos^k(x)$ . La famille  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est-elle une famille libre de  $C(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 7 (★).** On considère les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^4$  suivants :

1.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ ,
2.  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t\}$ ,
3.  $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b = c = d\}$ .

Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$  ; donner une base de chacun d'eux.

**Exercice 8 (★).** Dans les cas suivants, indiquer si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si c'est le cas, en donner une base.

1.  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ .
2.  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = x\}$ .
3.  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$ .

**Exercice 9 (★).** On se place dans  $E = \mathbb{R}_2[X]$ . Soit  $A = \{P \in E \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(2) = 0\}$ . Montrer que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et en déterminer une base.

**Exercice 10 (★★).** Montrer que les polynômes  $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$  forment une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_3[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. En particulier, exprimer  $X^2$  et  $X^3$  dans cette base.

**Exercice 11 (★★).** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(2x)$  et  $g(x) = x \exp(2x)$ . On note  $E$  l'ensemble des fonctions  $h$  telles qu'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (ax + b)e^{2x}$ .

1. Prouver que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .
2. La famille  $(f, g)$  est-elle une famille libre de  $E$ ? une base de  $E$ ?
3. Soit  $\varphi$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = 3x$ . La fonction  $\varphi$  est-elle un élément de  $E$ ?

**Exercice 12 (★★).** Soient  $F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$  et  $G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3, (b, c) \in \mathbb{R}^2\}$ . Ces deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  sont-ils supplémentaires?

**Exercice 13 (★★).** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . On pose  $F = \text{Vect}(X-1, X)$  et  $G = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$ .

1. Montrer que  $G$  est un espace vectoriel.
2. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 14 (★★).** Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $P$  l'ensemble des fonctions paires, et  $I$  l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que  $P$  et  $I$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  et que  $E = P \oplus I$ .

**Exercice 15 (★★).** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F, G$  et  $H$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que :

1.  $(F \cap H) + (G \cap H) \subset (F + G) \cap H$
2.  $(F \cap G) + H \subset (F + H) \cap (G + H)$

**Exercice 16 (Type DS).** Soit  $F$  l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Montrer que  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. On pose  $a$  et  $b$  les suites définies par  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n$  et  $b_n = 2^n$ .
  - (a) Montrer que  $(a, b)$  est une famille d'éléments de  $F$ .
  - (b) Montrer que  $(a, b)$  est une famille génératrice de  $F$ .
  - (c) Montrer que  $(a, b)$  est une famille libre de  $F$ .
  - (d) Que peut-on déduire des questions précédentes?