

# Analyse harmonique des SLCI

N. Mesnier

Lycée international Jean Perrin, Lyon

2025–2026

# Objectif

## ■ Étudier la réponse des SLCI pour un signal périodique quelconque

Tout signal périodique  $e(t)$  de période  $T$ , peut être décomposé en une somme de sinusoïdes de pulsations et d'amplitudes différentes appelée **série de Fourier** :

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

avec :

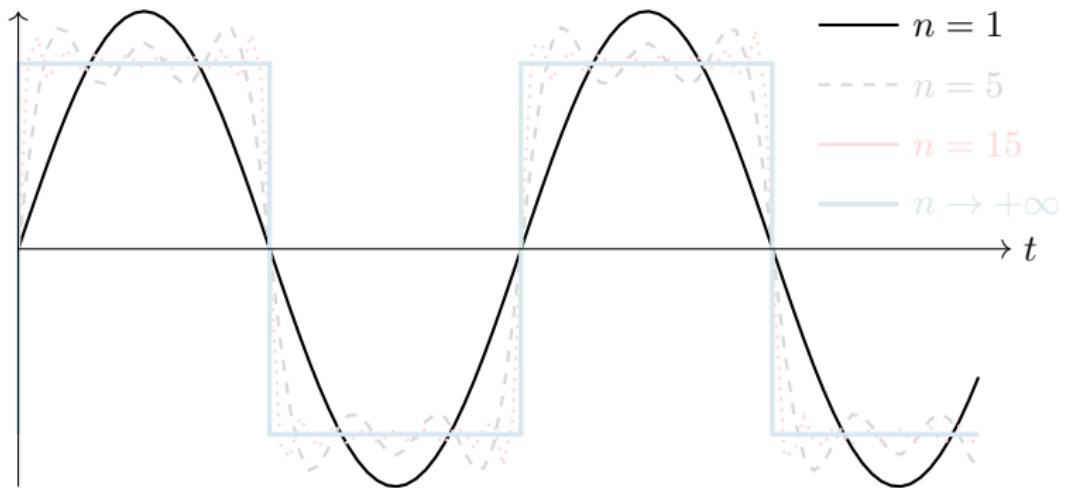
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt$$

# Objectif

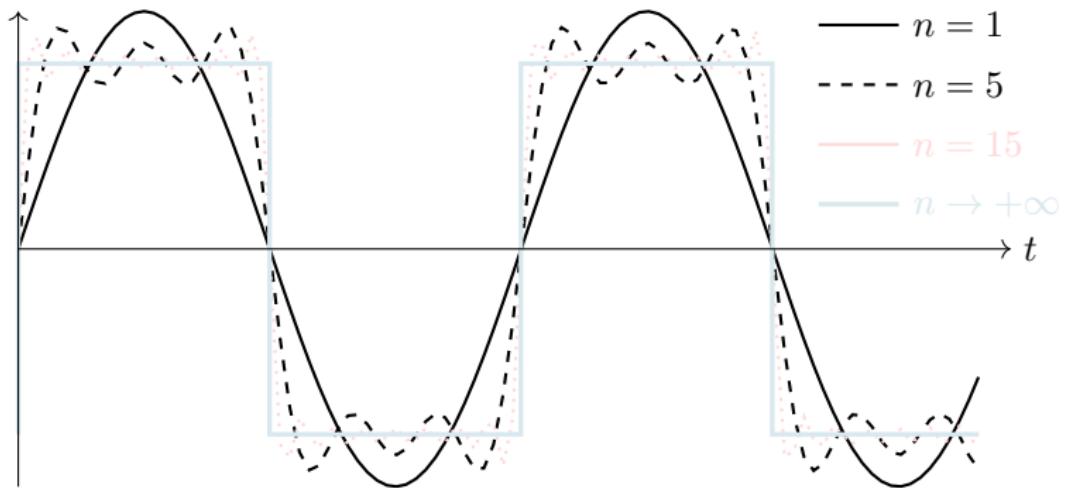
## ■ Exemple de décomposition en série de Fourier



Animation : [créneau & triangle](#)

# Objectif

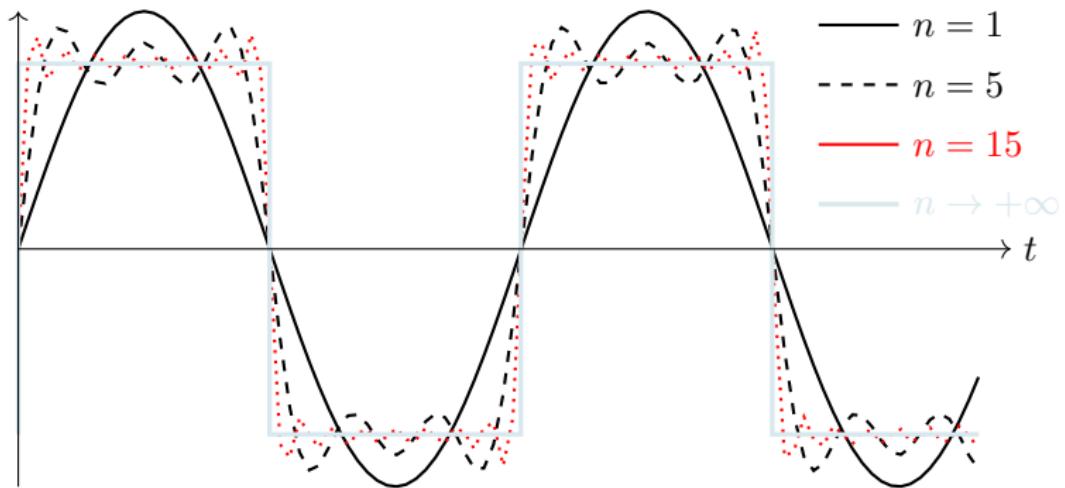
## ■ Exemple de décomposition en série de Fourier



Animation : [créneau & triangle](#)

# Objectif

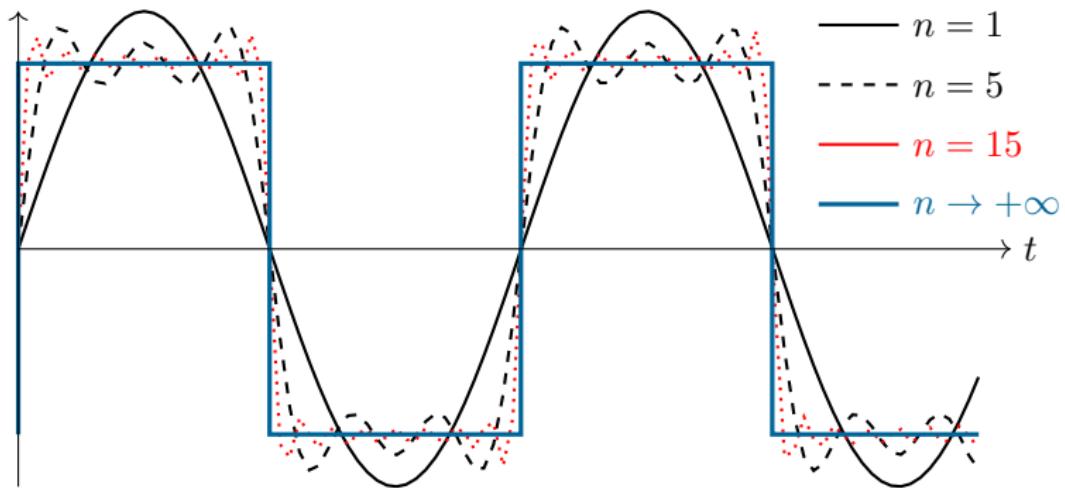
## ■ Exemple de décomposition en série de Fourier



Animation : [créneau & triangle](#)

# Objectif

## ■ Exemple de décomposition en série de Fourier



Animation : [créneau & triangle](#)

# Objectif élémentaire

## Définition (Réponse harmonique)

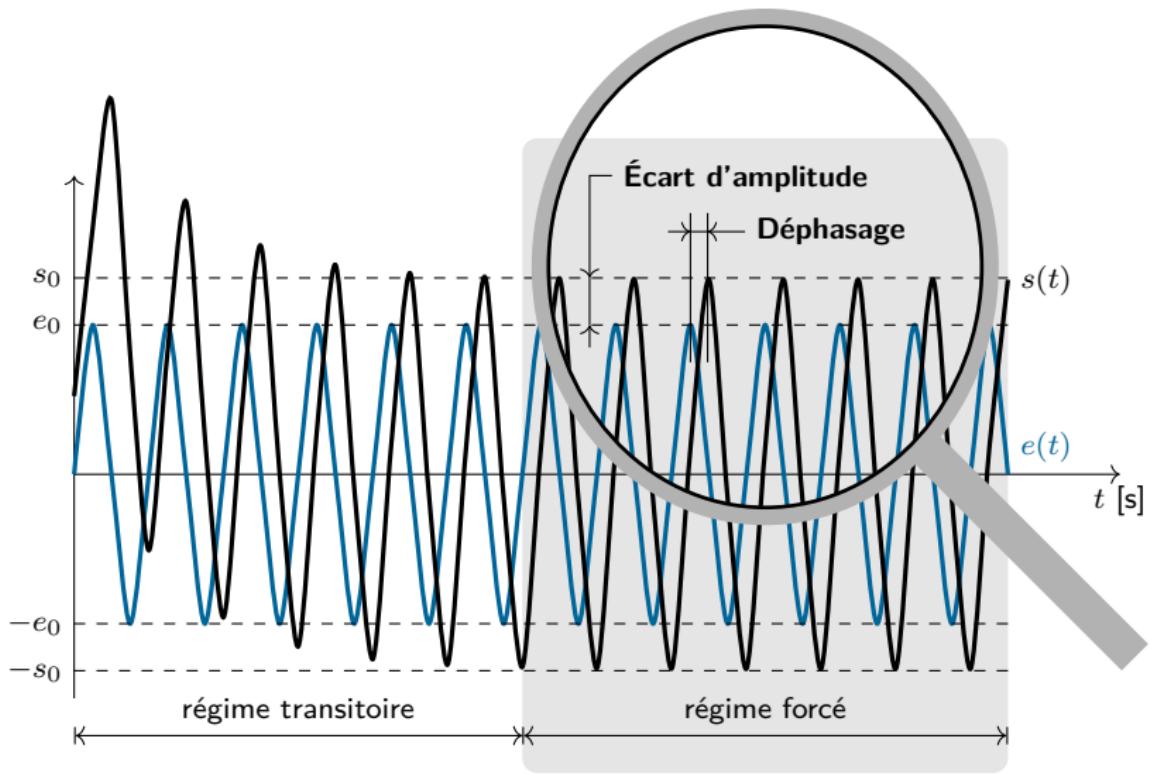
La réponse harmonique d'un système linéaire continu et invariant stable correspond à sa réponse asymptotique forcée (en régime permanent), lorsqu'il est sollicité par un signal d'entrée harmonique du type

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$$

d'amplitude  $e_0$  et de pulsation  $\omega$ .



# Réponse harmonique



# Plan du cours

- ① Introduction
- ② Représentations harmoniques des transmittances
- ③ Application à l'étude de la stabilité des systèmes



## Introduction

# Réponse harmonique

## ■ Modèle de système dynamique

d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  = équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}(t) + \cdots + a_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t) + \cdots + b_n \frac{d^n s}{dt^n}(t)$$

vérifiant le principe de causalité ( $m \leq n$ ).

Fonction de transfert (en conditions de Heaviside) :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \cdots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_n p^n} = \frac{a_m \prod_{i=1}^m (p - z_i)}{b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)}$$

avec  $z_i$  chacun des  $m$  zéros du numérateur et  $p_j$  chacun des  $n$  pôles du dénominateur.

# Réponse harmonique

## Définition (Réponse harmonique)

La réponse harmonique d'un système linéaire continu et invariant stable correspond à sa réponse asymptotique forcée (en régime permanent), lorsqu'il est sollicité par un signal d'entrée harmonique du type

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$$

d'amplitude  $e_0$  et de pulsation  $\omega$ .

# Réponse harmonique

Lorsqu'un système est soumis à une entrée de la forme :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{e_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

sa réponse dans le domaine de Laplace est :

$$S(p) = H(p) E(p) = e_0 \omega \frac{a_m \prod_{i=1}^m (p - z_i)}{(p^2 + \omega^2) b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)}$$

admettant une décomposition en éléments simples de la forme :

$$S(p) = e_0 \omega \left( \sum_{\text{pôles réels}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{multiplicité}} \frac{A_i}{(p - p_j)^i} \right] + \sum_{\substack{\text{paires de pôles} \\ \text{complexes}}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{multiplicité}} \frac{B_i p + C_i}{((p - \Re[p_j])^2 + (\Im[p_j])^2)^i} \right] + \frac{\alpha p + \beta}{p^2 + \omega^2} \right)$$

# Stabilité asymptotique

D'après le théorème d'amortissement, qui s'écrit pour une fonction  $f(t)$

$$\mathcal{L}[f(t) \exp(-at)](p) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-(p+a)t) dt = F(p+a)$$

on peut en déduire que :

$$F(p - \Re[p_j]) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) \exp(\Re[p_j]t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } \Re[p_j] < 0 \\ f(\infty) & \text{si } \Re[p_j] = 0 \\ \infty & \text{si } \Re[p_j] > 0 \end{cases}$$

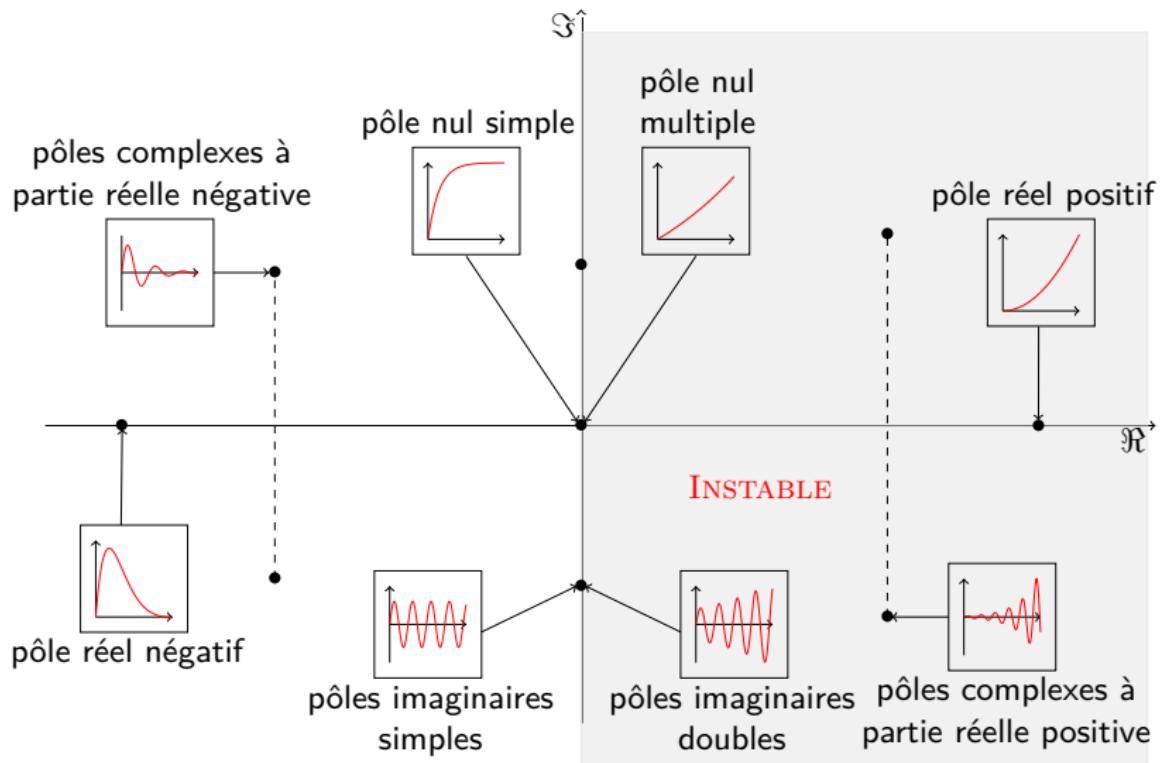
## Définition (Stabilité asymptotique)

Un système linéaire continu et invariant est asymptotiquement stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

## Théorème (Système asymptotiquement stable)

*Un système linéaire continu et invariant est asymptotiquement stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.*

# Stabilité & position des pôles



# Réponse harmonique

Si  $\operatorname{Re}[p_j] < 0$ ,  $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on peut décomposer la réponse du système :

$$S(p) = S_{\text{libre}}(p) + S_{\text{forcée}}(p)$$

avec une réponse dite « libre »

$$S_{\text{libre}}(p) = e_0 \omega \left( \sum_{\text{pôles } \mathbb{R}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{mult.}} \frac{A_i}{(p - p_j)^i} \right] + \sum_{\substack{\text{paires de} \\ \text{pôles } \mathbb{C}}} \left[ \sum_{i=1}^{\text{mult.}} \frac{B_i p + C_i}{((p - \Re[p_j])^2 + (\Im[p_j])^2)^i} \right] \right)$$

dont l'expression temporelle tend asymptotiquement vers 0

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s_{\text{libre}}(t) = 0$$

et une réponse dite « forcée »

$$S_{\text{forcée}}(p) = e_0 \omega \left( \frac{\alpha p + \beta}{p^2 + \omega^2} \right) = e_0 \left( \alpha \omega \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \beta \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right).$$

# Réponse harmonique

Régime permanent  $\iff$  réponse « forcée » :

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 (\alpha \omega \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) u(t)$$

En notant  $\tan(\varphi) = \alpha\omega/\beta$  tel que

$$\cos(\varphi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{\alpha \omega}{\sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2}}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} s_{\text{forcée}}(t) &= e_0 \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2} (\sin(\varphi) \cos(\omega t) + \cos(\varphi) \sin(\omega t)) u(t) \\ &= e_0 \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2} \sin(\omega t + \varphi) u(t) \end{aligned}$$

# Réponse harmonique

En remarquant qu'il est possible d'annuler le terme  $(p^2 + \omega^2)$  avec  $p = \pm j\omega$ , il vient le système :

$$\begin{cases} -\alpha j\omega + \beta = \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p^2 + \omega^2) \frac{S(p)}{e_0 \omega} = \lim_{p \rightarrow -j\omega} H(p) = H(-j\omega) \\ \alpha j\omega + \beta = \lim_{p \rightarrow j\omega} (p^2 + \omega^2) \frac{S(p)}{e_0 \omega} = \lim_{p \rightarrow j\omega} H(p) = H(j\omega) \end{cases}$$

permettant de déterminer  $\alpha$  et  $\beta$

$$\alpha\omega = \Im[H(j\omega)] \quad \text{et} \quad \beta = \Re[H(j\omega)]$$

tels que :

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) u(t) \quad \text{avec} \quad \varphi \equiv \angle H(j\omega) [2\pi]$$

avec

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad \tan(\angle H(j\omega)) = \frac{\alpha\omega}{\beta}$$

# Réponse harmonique

## Théorème (Réponse harmonique)

*La réponse asymptotique forcée d'un système linéaire, continu et invariant asymptotiquement stable, de fonction de transfert  $H(p)$  à une entrée sinusoïdale  $e(t) = e_0 \sin(\omega t)u(t)$  est une sinusoïde d'expression :*

$$s_{\text{forcé}}(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)u(t)$$

*de même pulsation  $\omega$ , d'amplitude multipliée par le module  $|H(j\omega)|$  et déphasée par l'argument  $\varphi = \angle H(j\omega)$  de la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$ .*

# Exemple de réponse harmonique

## ■ Réponse harmonique d'un système du 1<sup>er</sup> ordre

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}, \quad K > 0$$

Signal d'entrée :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{e_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Réponse dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p) E(p) = \frac{K e_0 \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + \tau p)}$$

# Exemple de réponse harmonique

Décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{A p + B}{p^2 + \omega^2} + \frac{C}{1 + \tau p}$$

Détermination des coefficients :

$$A = \frac{1}{2j\omega} \left[ \lim_{p \rightarrow j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) - \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) \right] = -\frac{K E_0 \omega \tau}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$B = \frac{1}{2} \left[ \lim_{p \rightarrow j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) + \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p^2 + \omega^2) S(p) \right] = \frac{K E_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

$$C = \lim_{p \rightarrow -1/\tau} (1 + \tau p) S(p) = \frac{K E_0 \omega \tau^2}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

Réponse dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K E_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \frac{1 - \tau p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\tau^2}{1 + \tau p} \right)$$

# Exemple de réponse harmonique

Réponse dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \frac{\tau}{p + 1/\tau} + \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - \tau \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right)$$

Transformée de Laplace inverse  $\longrightarrow$  réponse temporelle :

$$s(t) = \frac{K e_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \underbrace{\tau e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - \tau \cos(\omega t)}_{\text{régime forcé}} \right) u(t)$$

comme :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/\tau} = 0$$

en régime permanent ( $t \rightarrow +\infty$ ) :

$$s_{\text{forçée}}(t) = \frac{K e_0}{1 + \tau^2 \omega^2} (\sin(\omega t) - \tau \omega \cos(\omega t)) u(t)$$

# Exemple de réponse harmonique

En posant :

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{-\tau \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \leqslant 0$$

il vient :

$$s_{\text{forcée}}(t) = \frac{K e_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

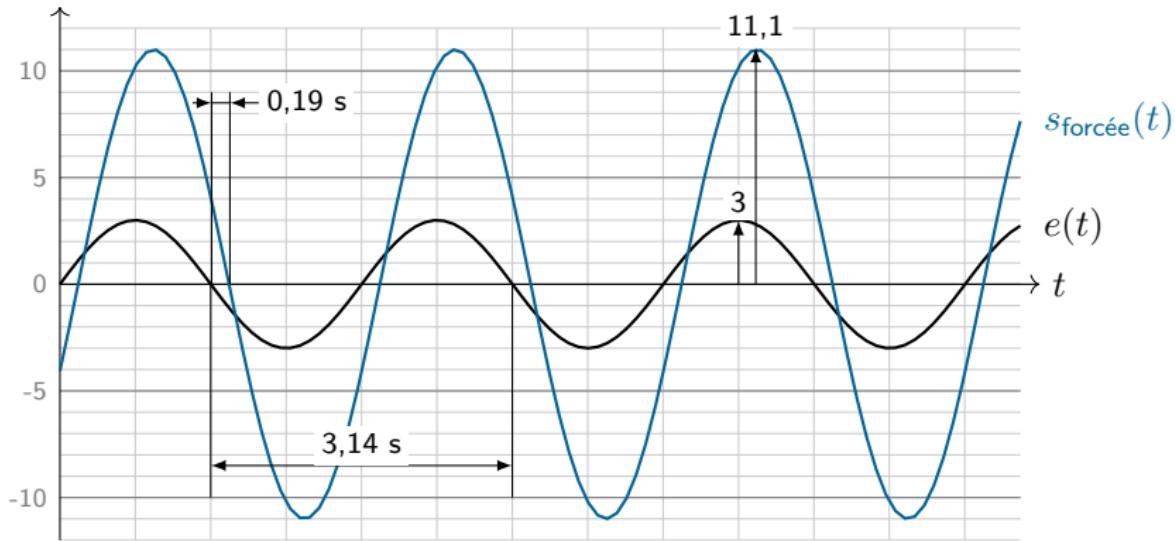
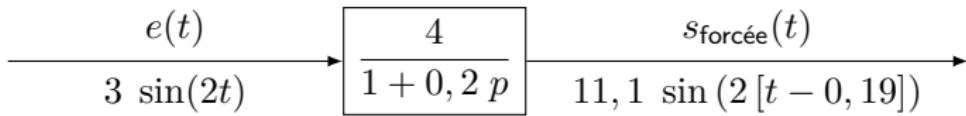
À partir de la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$  :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} & \text{Module} \\ \angle H(j\omega) \equiv -\text{Arctan}(\tau \omega) [2\pi] & \text{Argument} \end{cases}$$

⇒ Réponse en régime forcé :

$$s_{\text{forcée}}(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

# Exemple de réponse harmonique II



# Analyse harmonique

## Définition (Analyse harmonique)

L'analyse harmonique d'un système linéaire continu et invariant stable consiste à analyser ses réponses harmoniques pour l'ensemble des pulsations propres  $\omega \in ]0, +\infty[$  du signal harmonique d'entrée.

■ **Objectif** : prédire la réponse en régime permanent (forcée) d'un système soumis à une somme d'entrées du type  $e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$ .

■ **Besoins** : pour chaque pulsation d'excitation  $\omega$ ,

- module  $|H(j\omega)|$
- argument  $\varphi = \angle H(j\omega)$

de la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$ .

# Analyse harmonique

## Définition (Fonction de transfert complexe)

On appelle fonction de transfert complexe ou transmittance isochrone l'expression  $H(j\omega)$  d'une fonction de transfert  $H(p)$  dans le cas où la variable complexe de Laplace  $p = j\omega$  est un imaginaire pur. On la notera :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \exp(j\varphi(\omega))$$

avec  $|H(j\omega)|$  le module et  $\varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$  l'argument.

Transformée de Fourier (= transformée de Laplace avec  $p = j\omega$ ) :

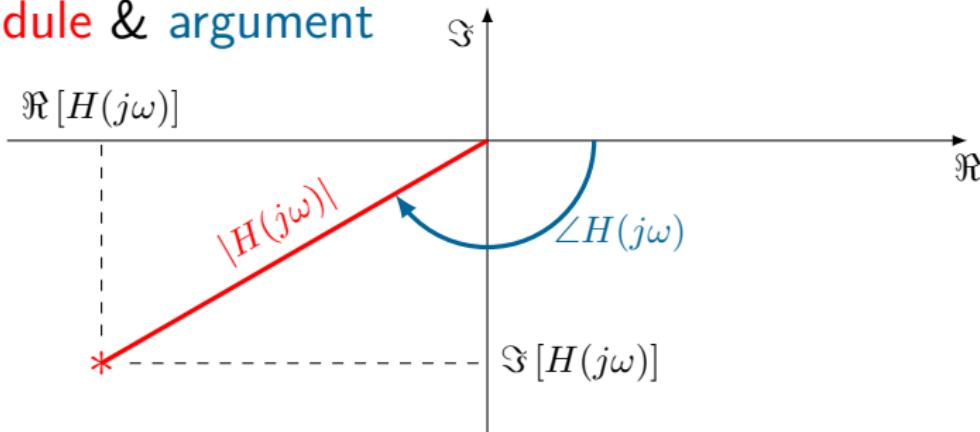
$$H(j\omega) = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

$h(t)$  : réponse impulsionnelle du système

$H$  : fonction de transfert complexe.

# Analyse harmonique

## i Module & argument



Module :  $|H(j\omega)| = \sqrt{\Re [H(j\omega)]^2 + \Im [H(j\omega)]^2}$

Argument :  $\angle H(j\omega)$  tel que

$$\begin{cases} \cos (\angle H(j\omega)) = \frac{\Re [H(j\omega)]}{|H(j\omega)|} \\ \sin (\angle H(j\omega)) = \frac{\Im [H(j\omega)]}{|H(j\omega)|} \end{cases}$$

# Analyse harmonique

## ■ Module & argument II

Pour toute FT de la forme :

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

Module :

$$|H(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|}$$

Argument :

$$\angle H(j\omega) \equiv \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega) [2\pi]$$

# Lieux de transfert

## Définition (Lieux de transfert)

On appelle lieux de transfert, le tracé des différentes représentations graphiques de la fonction de transfert complexe  $H(j\omega)$  d'un système pour toutes les pulsations d'excitation possibles.

Représentations graphiques utilisées en ingénierie :

- les diagrammes de Bode ;
- le diagramme de Black (courbe paramétrée en  $\omega$  dans le plan  $(\varphi(\omega), |H(j\omega)|_{dB})$ , hors programme) ;
- le diagramme de Nyquist (courbe paramétrée en  $\omega$  dans le plan complexe, hors programme).

# Diagrammes de Bode

Diagrammes de bode = deux graphes :

- ❶ gain en décibel (dB) :

$$\log(\omega) \mapsto |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(|H(j\omega)|)$$

- ❷ phase en degrés :

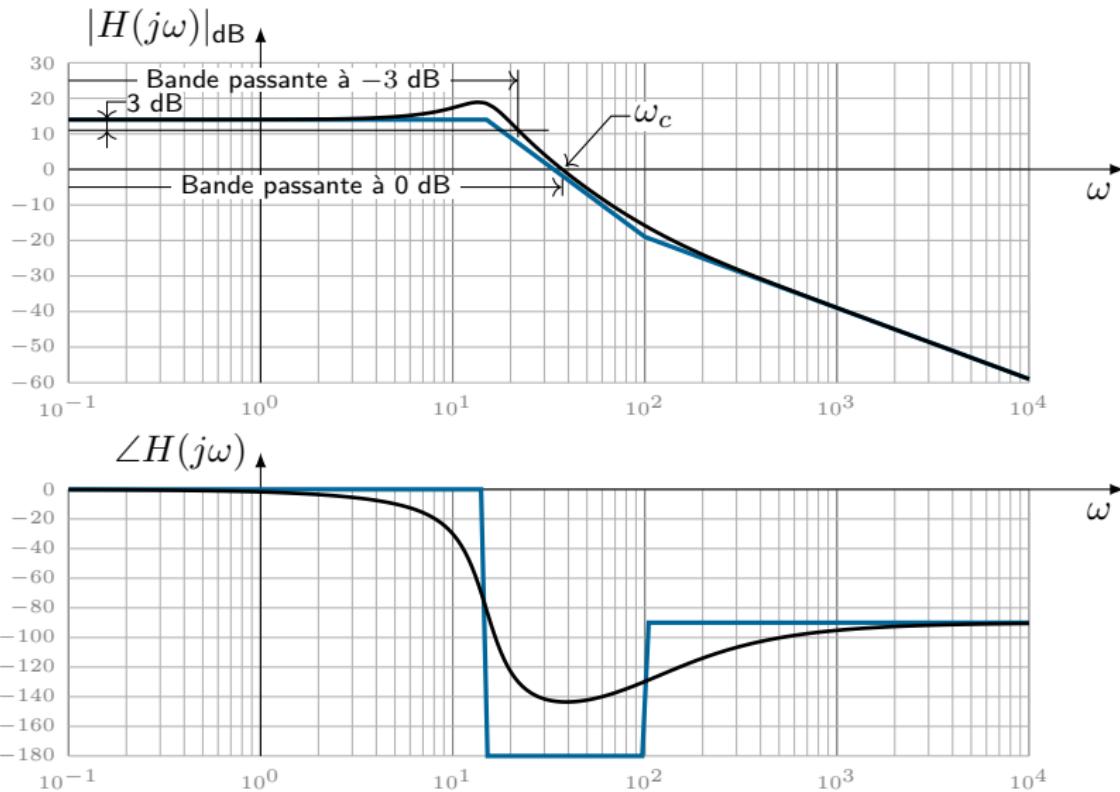
$$\log(\omega) \mapsto \varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$$

tracés en fonction de la pulsation propre du signal d'entrée  $\omega \in ]0; +\infty[$   
sur une échelle logarithmique.

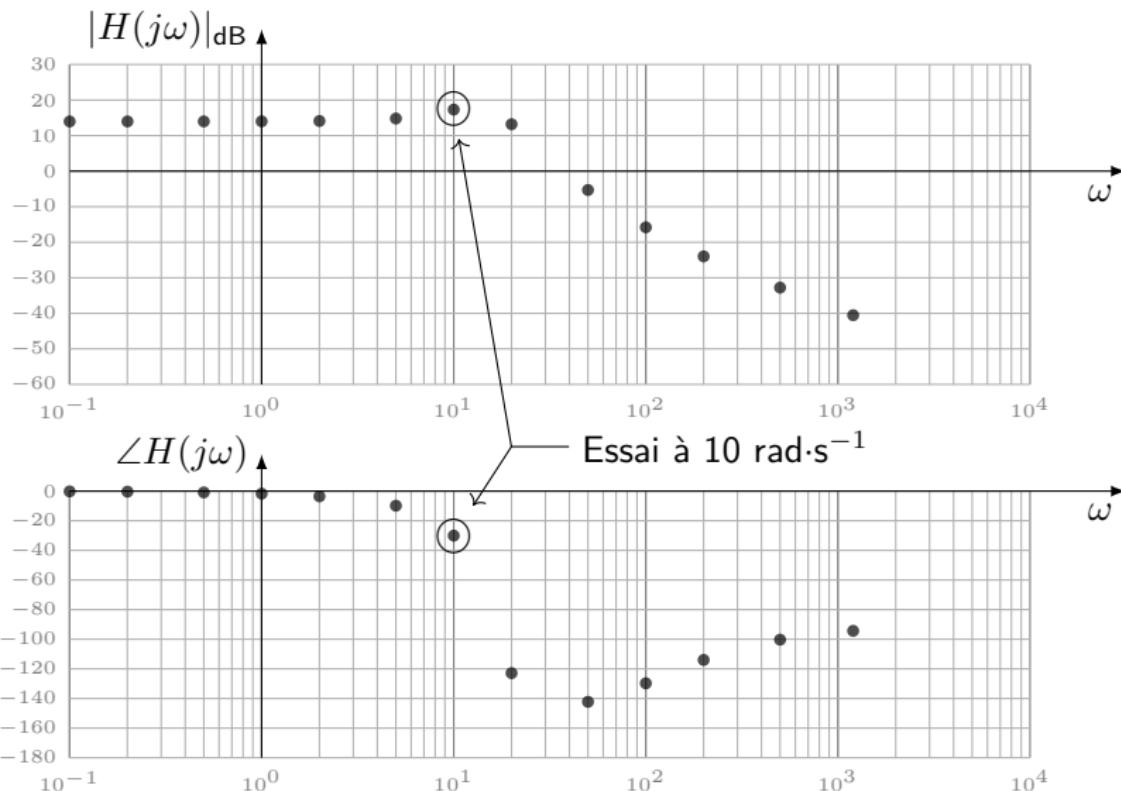
1 seule valeur à connaître :

$$\log(2) \approx 0,3$$

# Diagrammes de Bode



# Diagrammes de Bode expérimentaux



Vidéo : [Control'X](#)

# Diagrammes de Bode

## ■ Propriétés

Si  $H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$  alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log (|H_1(j\omega)| \times |H_2(j\omega)|) \\ = 20 \log (|H_1(j\omega)|) + 20 \log (|H_2(j\omega)|) \\ \angle H(j\omega) \equiv \angle (H_1(j\omega) \times H_2(j\omega)) [2\pi] \\ \equiv \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega) [2\pi] \end{array} \right.$$

Graphiquement : ajout les diagrammes de Bode des fonctions  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$ .

## ■ Vocabulaire :

- octave  $\omega \mapsto 2 \times \omega$
- décade  $\omega \mapsto 10 \times \omega$

Équivalences entre module et gain en décibel :

$ H $	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
$ H _{\text{dB}}$	-40	-20	-6	-3	0	3	6	20	40



## Représentations harmoniques des transmittances

# Gain pur

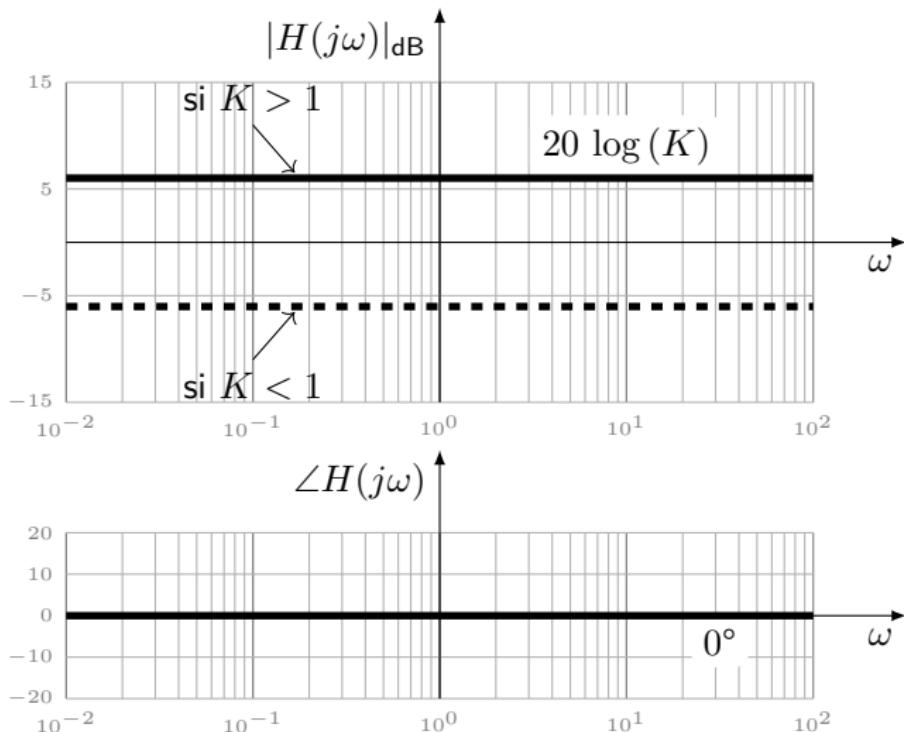
Fonction de transfert :

$$H(p) = K \implies H(j\omega) = K$$

Module (gain) & argument :  $\forall \omega \in ]0; +\infty[$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) \\ \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

# Gain pur : diagrammes de Bode



# Intégrateur

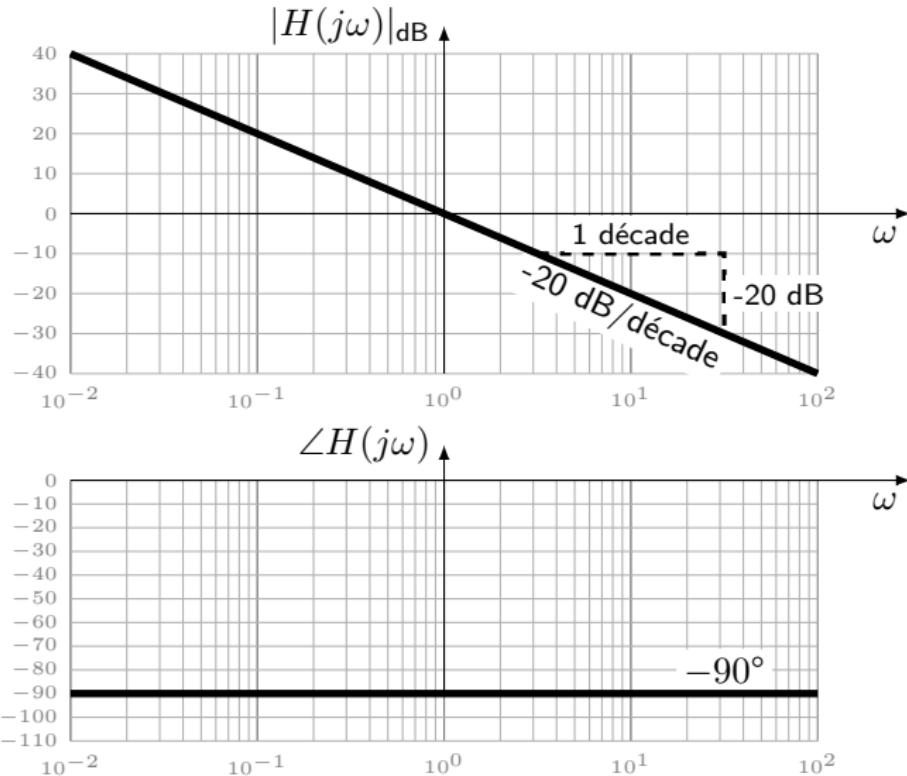
Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{p} \implies H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega}$$

Module (gain) & argument :  $\forall \omega \in ]0; +\infty[$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \\ \sin(\angle H(j\omega)) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log(\omega) \\ \angle H(j\omega) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

# Intégrateur : diagrammes de Bode



# Dérivateur

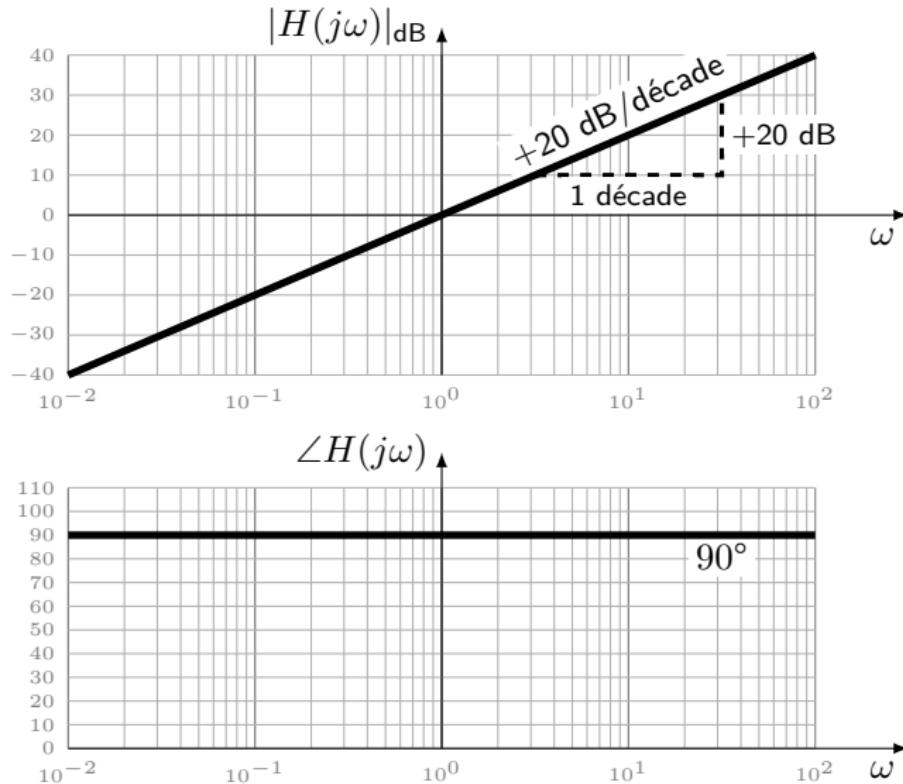
Fonction de transfert :

$$H(p) = p \implies H(j\omega) = j\omega$$

Module (gain) & argument :  $\forall \omega \in ]0; +\infty[$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \omega \\ \sin(\angle H(j\omega)) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(\omega) \\ \angle H(j\omega) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

# Dérivateur : diagrammes de Bode



# Premier ordre

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \implies H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} = K \frac{1 - j\tau \omega}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

avec :

$$\Re[H(j\omega)] = \frac{K}{1 + \tau^2 \omega^2} > 0 \quad \text{et} \quad \Im[H(j\omega)] = \frac{-K \tau \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} < 0$$

Module (gain) & argument :  $\forall \omega \in ]0; +\infty[$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \\ \iff |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}) \\ \angle H(j\omega) \equiv -\text{Arctan}(\tau \omega) [2\pi] \end{cases}$$

# Premier ordre

## ■ Comportement basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ )

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

## ■ Comportement haute fréquence ( $\omega \rightarrow +\infty$ )

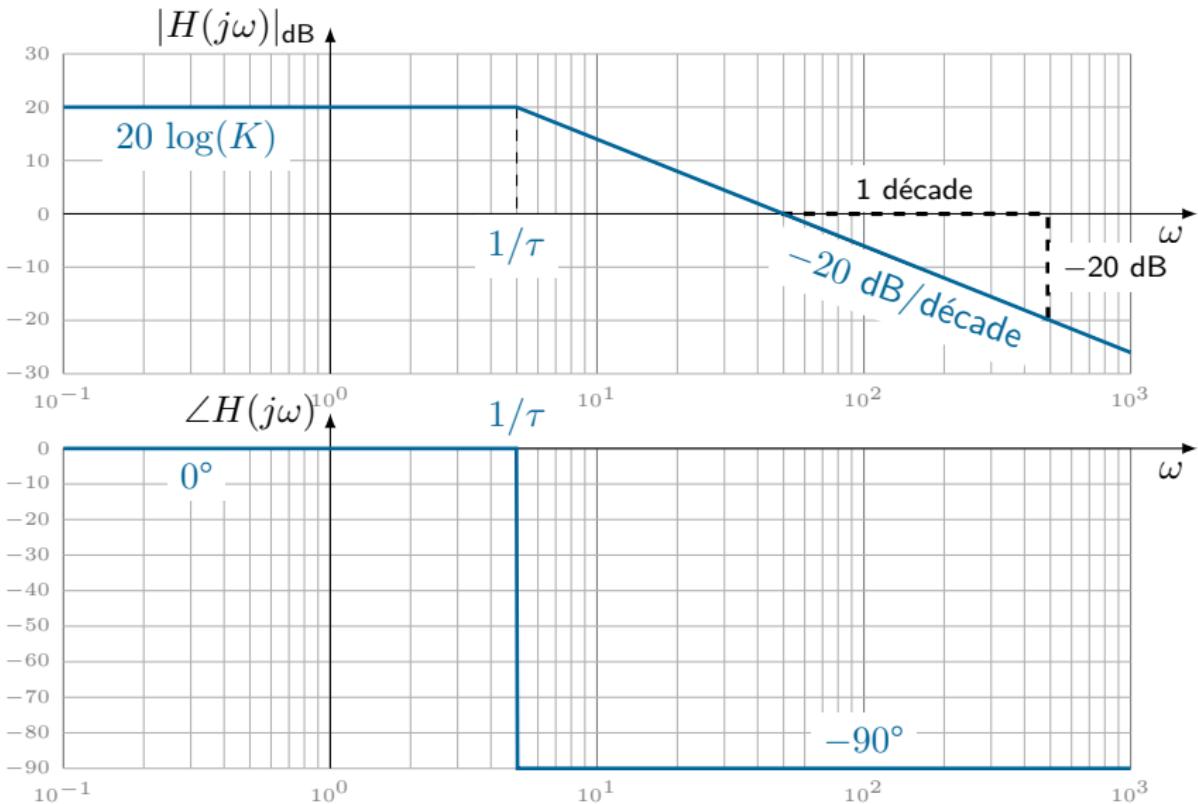
Comme  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \tau \omega$ , on a :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log \left( \frac{K}{\tau} \right) - 20 \log(\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

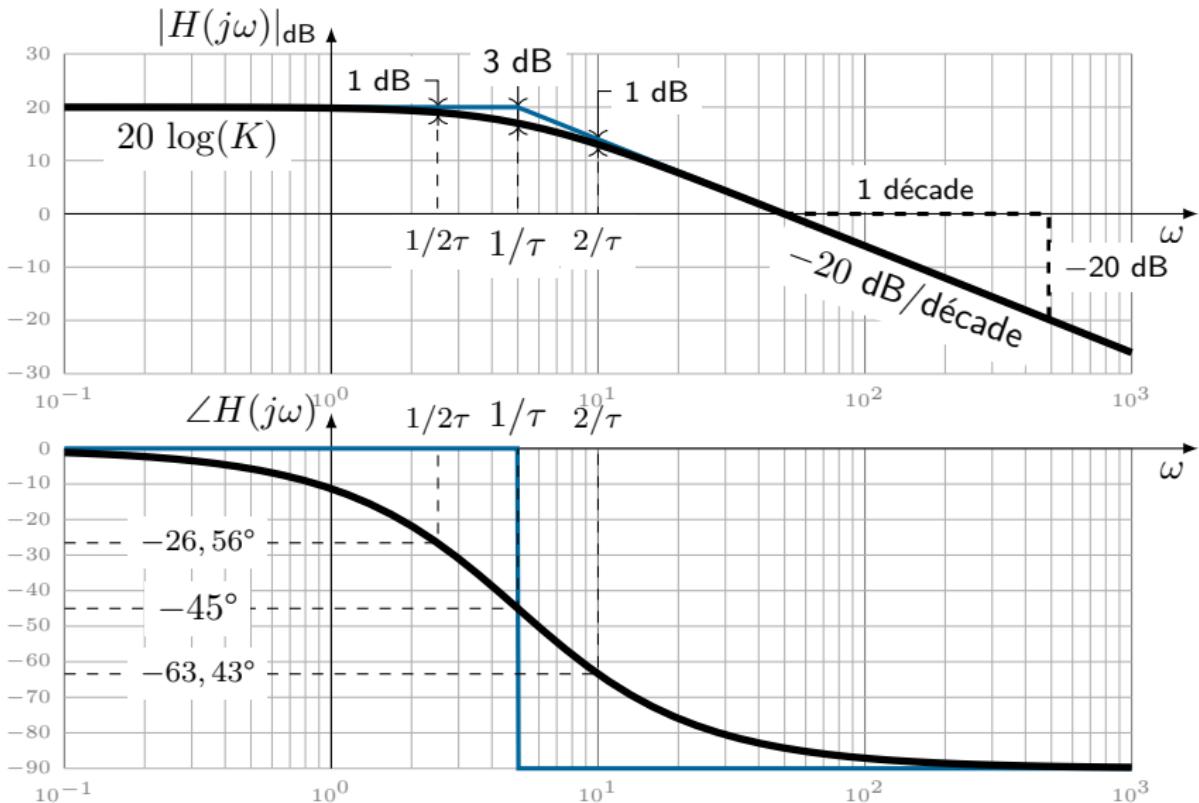
## ■ Comportement moyenne fréquence ( $\omega \sim 1/\tau$ )

$\omega$	$ H(j\omega) $	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$	$\angle H(j\omega)$ (°)
$1/2\tau$	$2K/\sqrt{5}$	$20 \log(K) - 1$ dB	$\text{Arctan}(-1/2)$	$-26, 56^\circ$
$1/\tau$	$K/\sqrt{2}$	$20 \log(K) - 3$ dB	$\text{Arctan}(-1)$	$-45^\circ$
$2/\tau$	$K/\sqrt{5}$	$20 \log(K) - 7$ dB	$\text{Arctan}(-2)$	$-63, 43^\circ$

# Premier ordre : diagrammes de Bode



# Premier ordre : diagrammes de Bode



# Numérateur d'ordre 1

Fonction de transfert :

$$H(p) = 1 + \tau p \implies H(j\omega) = 1 + \tau j\omega$$

Module (gain) & argument :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \iff |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \left( \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \right) \\ \angle H(j\omega) \equiv \text{Arctan}(\tau \omega) [2\pi] \end{cases}$$

Analyse (même démarche que 1<sup>er</sup> ordre) :

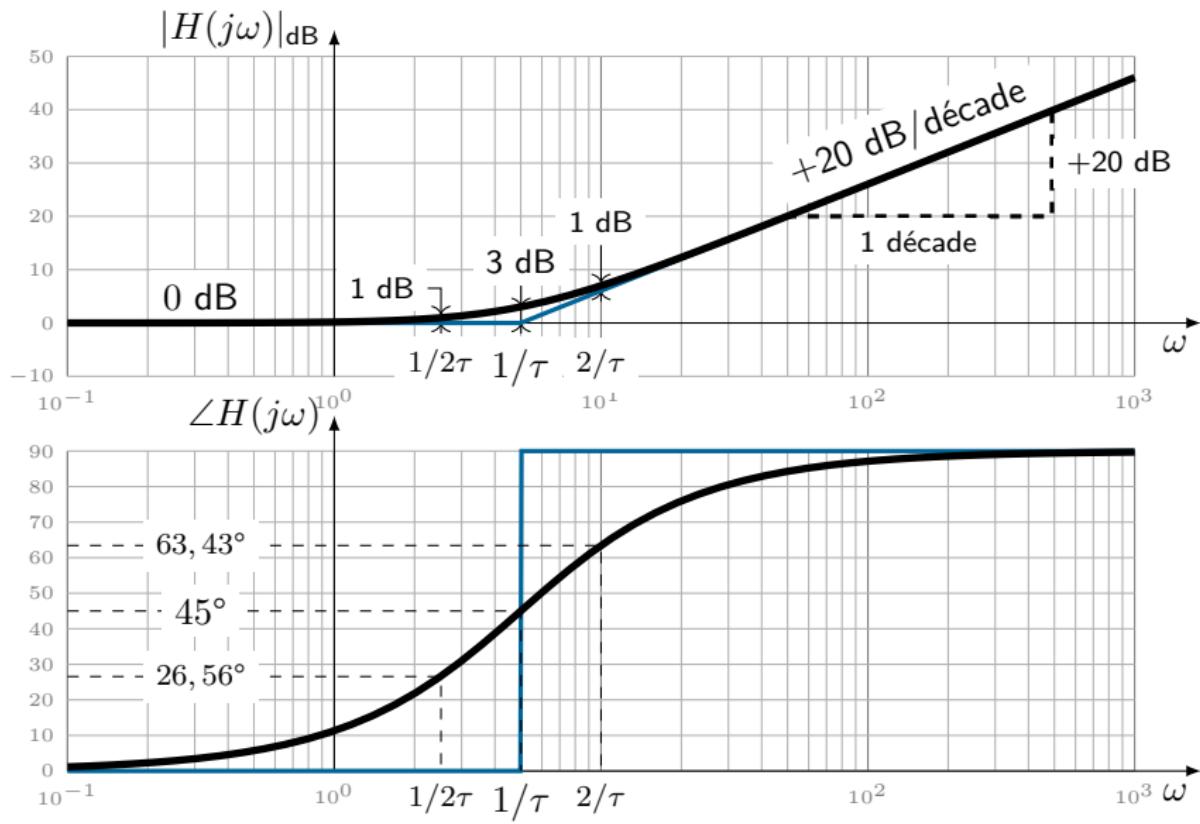
- basses fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ )

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

- hautes fréquences ( $\omega \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log (\tau) + 20 \log (\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

# Numérateur d'ordre 1 : diagrammes de Bode



# Second ordre sous-amorti ( $\xi \leq 1$ )

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \implies H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)}$$

avec :

$$\Re[H(j\omega)] = \frac{K \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \begin{cases} > 0 \text{ si } \omega < \omega_0 \\ = 0 \text{ si } \omega = \omega_0 \\ < 0 \text{ si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$$\Im[H(j\omega)] = \frac{-K \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} < 0$$

# Second ordre sous-amorti ( $\xi \leq 1$ )

Module & argument :

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}} \\ \angle H(j\omega) \equiv \frac{-\pi}{2} + \text{Arctan} \left( \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\xi\omega\omega_0} \right) [2\pi] \end{cases}$$

Gain (en dB) :

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$$

# Second ordre sous-amorti ( $\xi \leq 1$ )

## ■ Extrema du gain :

En posant  $u = \omega/\omega_0$ , il vient :

$$\frac{d \left[ (1 - u^2)^2 + (2\xi u)^2 \right]}{du} = 4u(u^2 - 1 + 2\xi^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = \pm\sqrt{1 - 2\xi^2} \text{ si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \end{cases}$$

Le cas  $u = 0$  correspond à la tangente horizontale quand  $\omega \rightarrow 0$  (BF).

Si  $\xi \leq 1/\sqrt{2} \approx 0,7 \Rightarrow$  maximum d'amplitude appelé **résonance** pour la pulsation :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_0$$

Amplitude :

$$|H(j\omega_r)|_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(2\xi\sqrt{1 - \xi^2}\right) \quad \text{si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Résonance marquée si  $\xi < 0,2 \Rightarrow$  permet de déterminer  $\xi$ .

# Second ordre sous-amorti ( $\xi \leq 1$ )

## ■ Comportement basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ )

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle H(j\omega) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

## ■ Comportement haute fréquence ( $\omega \rightarrow +\infty$ )

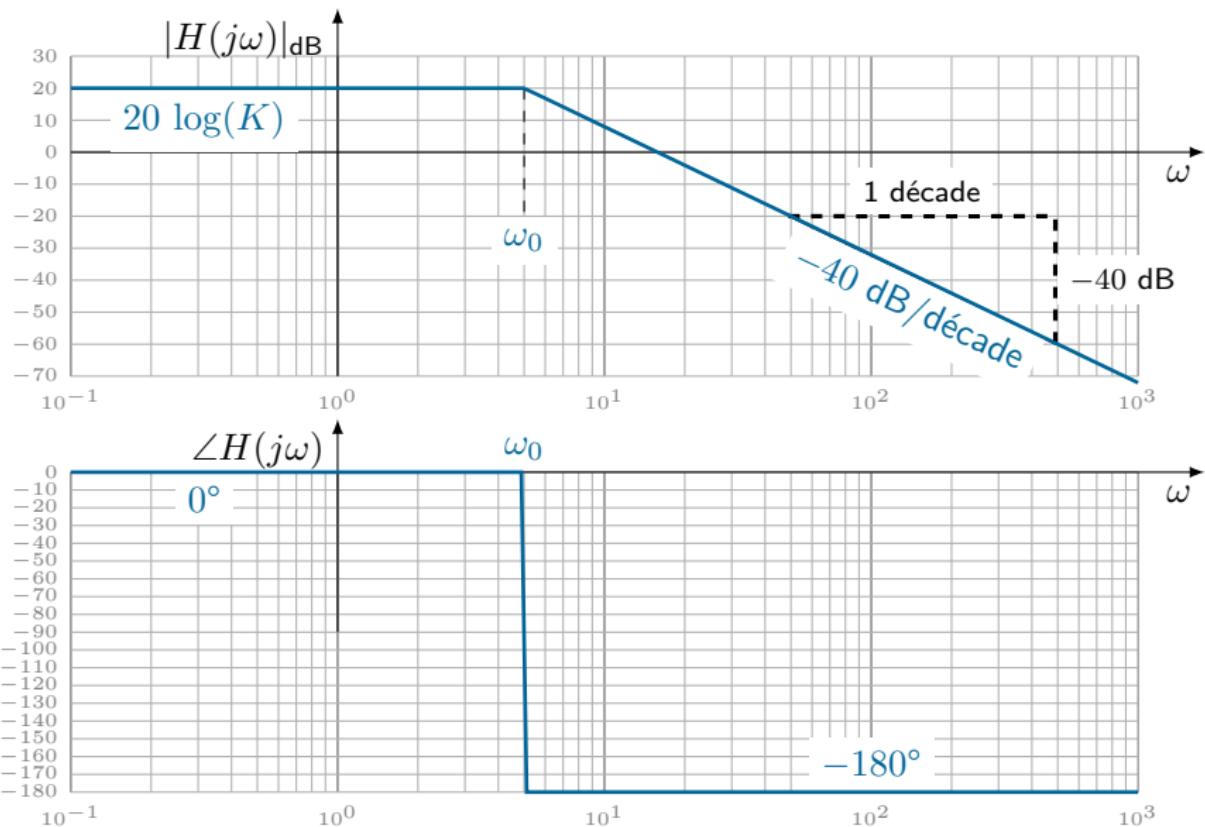
$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)|_{\text{dB}} \simeq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log(K\omega_0^2) - 40 \log(\omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) \equiv -\pi [2\pi] \end{cases}$$

## ■ Comportement moyenne fréquence ( $\omega \sim \omega_0$ )

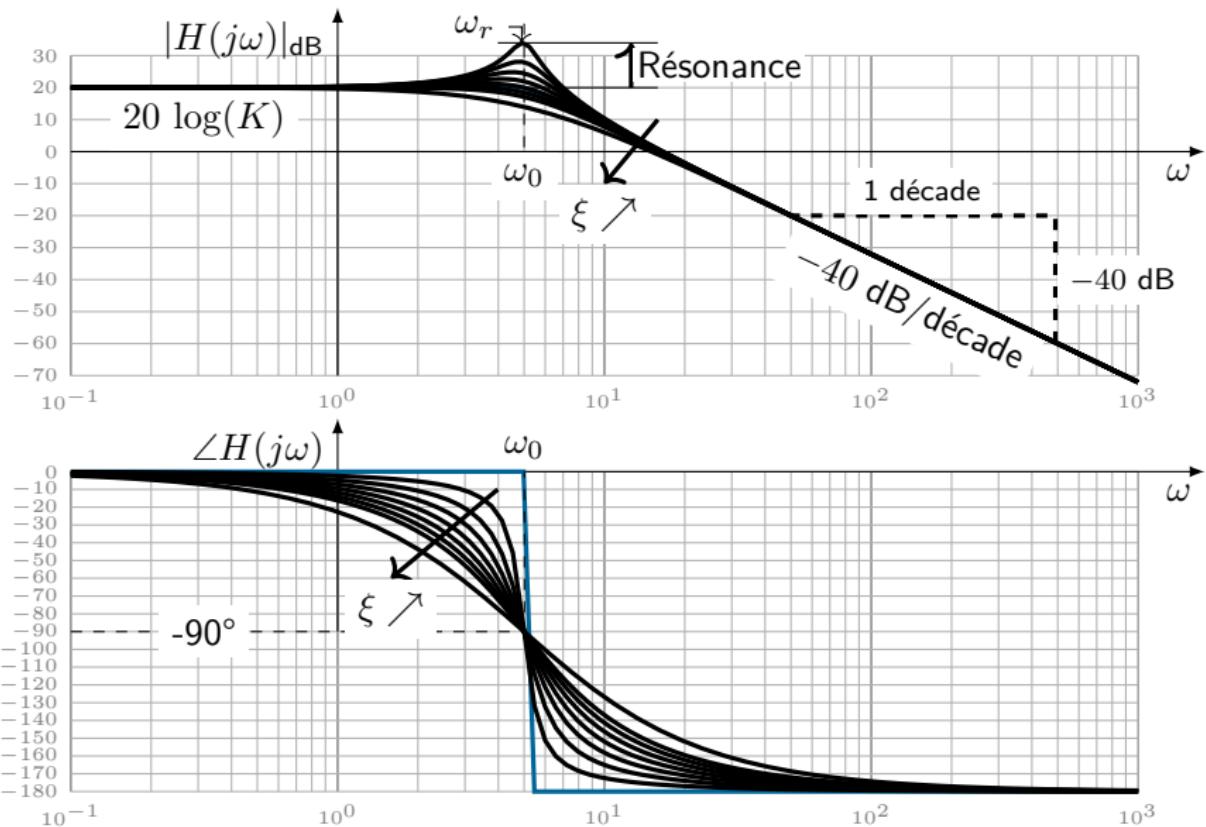
$$\begin{cases} |H(j\omega_0)|_{\text{dB}} = 20 \log(K) - 20 \log(2\xi) = 20 \log(KQ) \\ \angle H(j\omega_0) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$Q = 1/(2\xi)$  : facteur de qualité.

# Second ordre sous-amorti : diag. de Bode



# Second ordre sous-amorti : diag. de Bode



## Cas général

## ■ Factorisation de la fonction de transfert (pôles $p_i$ et zéros $z_j$ )

# Tracés asymptotiques élémentaires (1/3)

FT éléme.	$H(p)$	$ H(j\omega) _{dB}$	$\angle H(j\omega)$
Gain pur	$K$		
Intégrateur	$\frac{1}{p}$		
Dérivateur	$p$		

# Tracés asymptotiques élémentaires (2/3)

FT éléme.	$H(p)$	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$
Premier ordre	$\frac{1}{1 + \tau p}$		
Numérateur d'ordre 1	$1 + \tau p$		

# Tracés asymptotiques élémentaires (3/3)

FT éléme.	$H(p)$	$ H(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle H(j\omega)$
Second ordre sous-amorti	$\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$	<p>A Bode magnitude plot showing a horizontal asymptote at 0 dB for low frequencies. At the corner frequency <math>\omega_0 \log(\omega)</math>, there is a -40 dB/decade roll-off. The plot is labeled with <math>\omega_0 \log(\omega)</math> on the x-axis and has a slope of <math>-40 \text{ dB/déc.}</math>.</p>	<p>A Bode phase plot showing a horizontal asymptote at 0° for low frequencies. At the corner frequency <math>\omega_0 \log(\omega)</math>, there is a -180° jump. The plot is labeled with <math>\omega_0 \log(\omega)</math> on the x-axis and has a phase shift of <math>-180^\circ</math>.</p>
Numérateur d'ordre 2 sous-amorti	$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$	<p>A Bode magnitude plot showing a horizontal asymptote at 0 dB for low frequencies. At the corner frequency <math>\omega_0 \log(\omega)</math>, there is a +40 dB/decade roll-on. The plot is labeled with <math>\omega_0 \log(\omega)</math> on the x-axis and has a slope of <math>+40 \text{ dB/déc.}</math>.</p>	<p>A Bode phase plot showing a horizontal asymptote at +180° for low frequencies. At the corner frequency <math>\omega_0 \log(\omega)</math>, there is a -180° jump. The plot is labeled with <math>\omega_0 \log(\omega)</math> on the x-axis and has a phase shift of <math>+180^\circ</math>.</p>

# Exemple

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{5(1 + 5p)}{p(1 + 0,5p + 0,25p^2)}$$

Fonctions de transfert élémentaires :

① Gain pur :  $H_1(p) = 5$

② Intégrateur :  $H_2(p) = \frac{1}{p}$

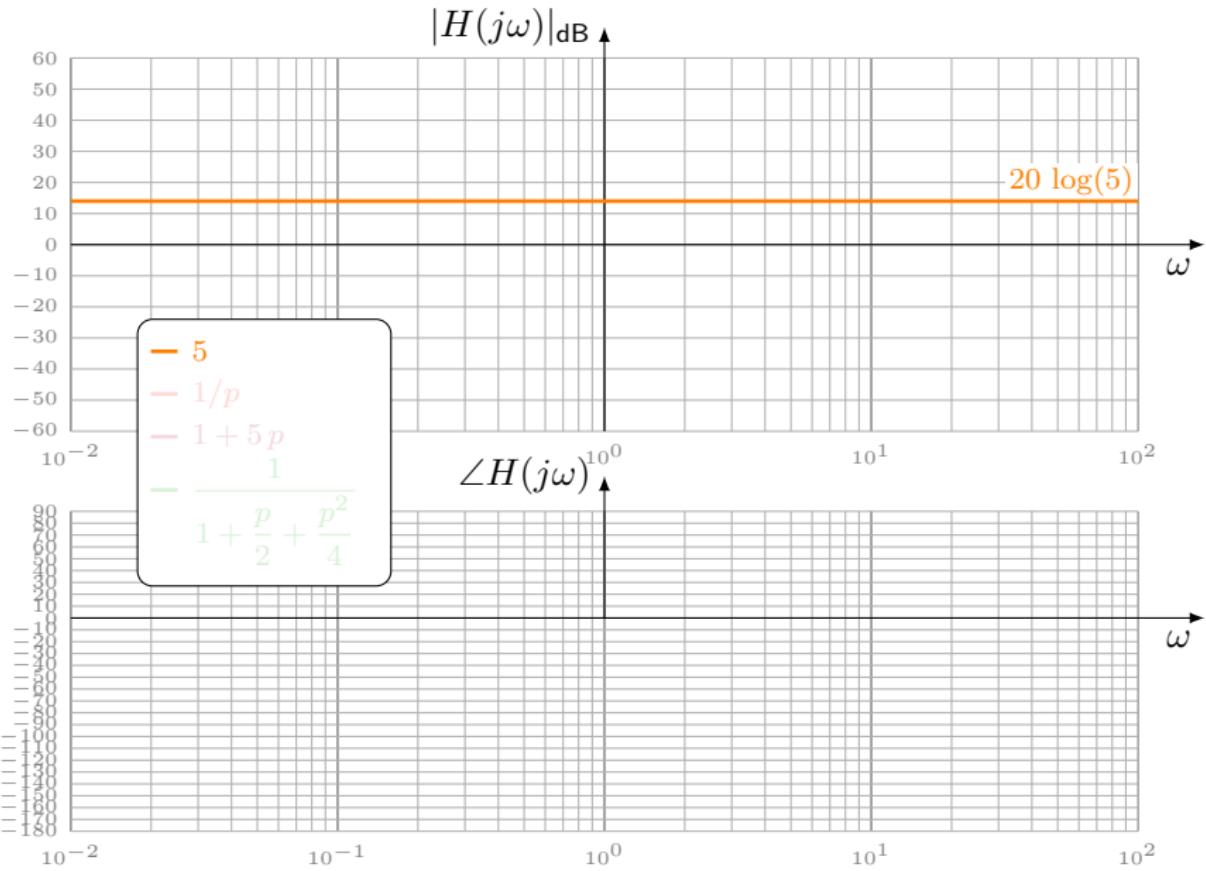
③ Numérateur d'ordre 1 :  $H_3(p) = 1 + 5p$

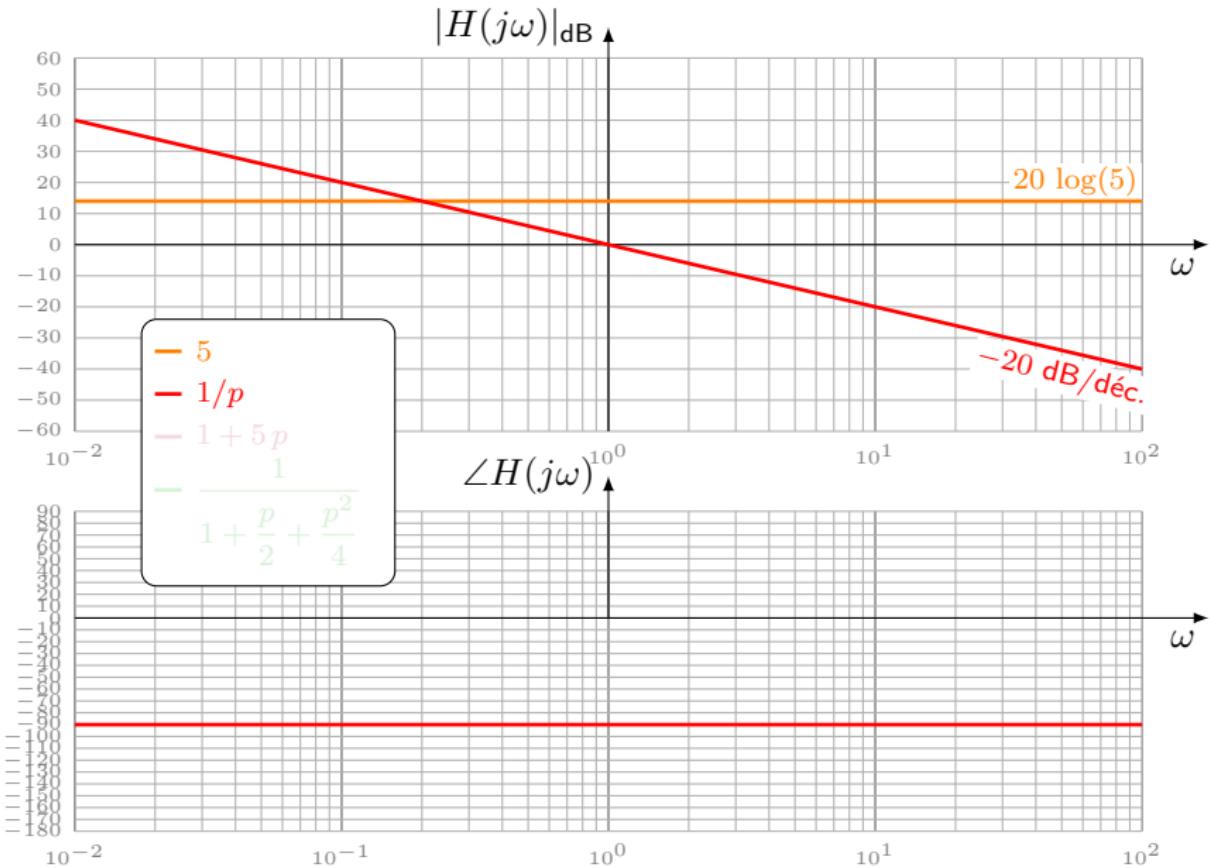
④ Second ordre :

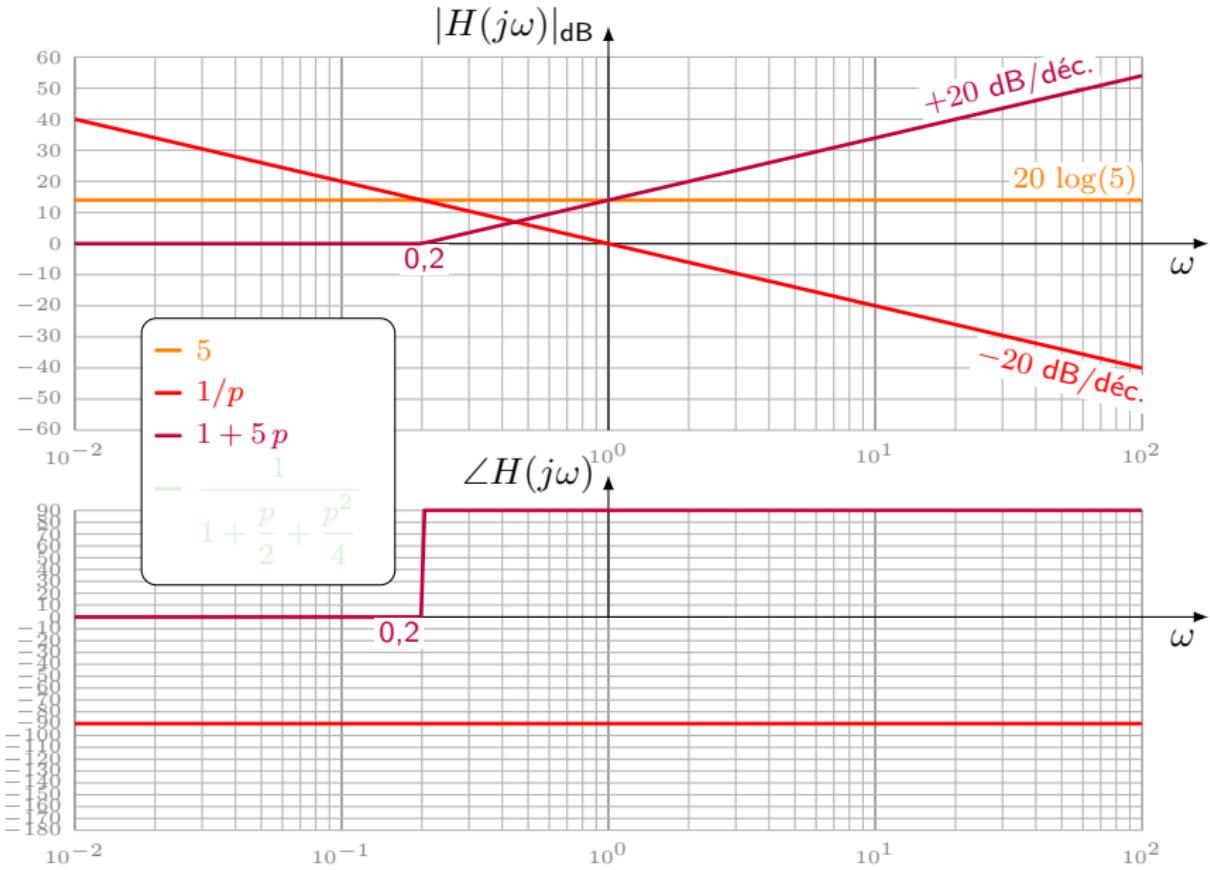
**⚠ Attention pôles réels ou complexes ?  $\Rightarrow$  factorisation**

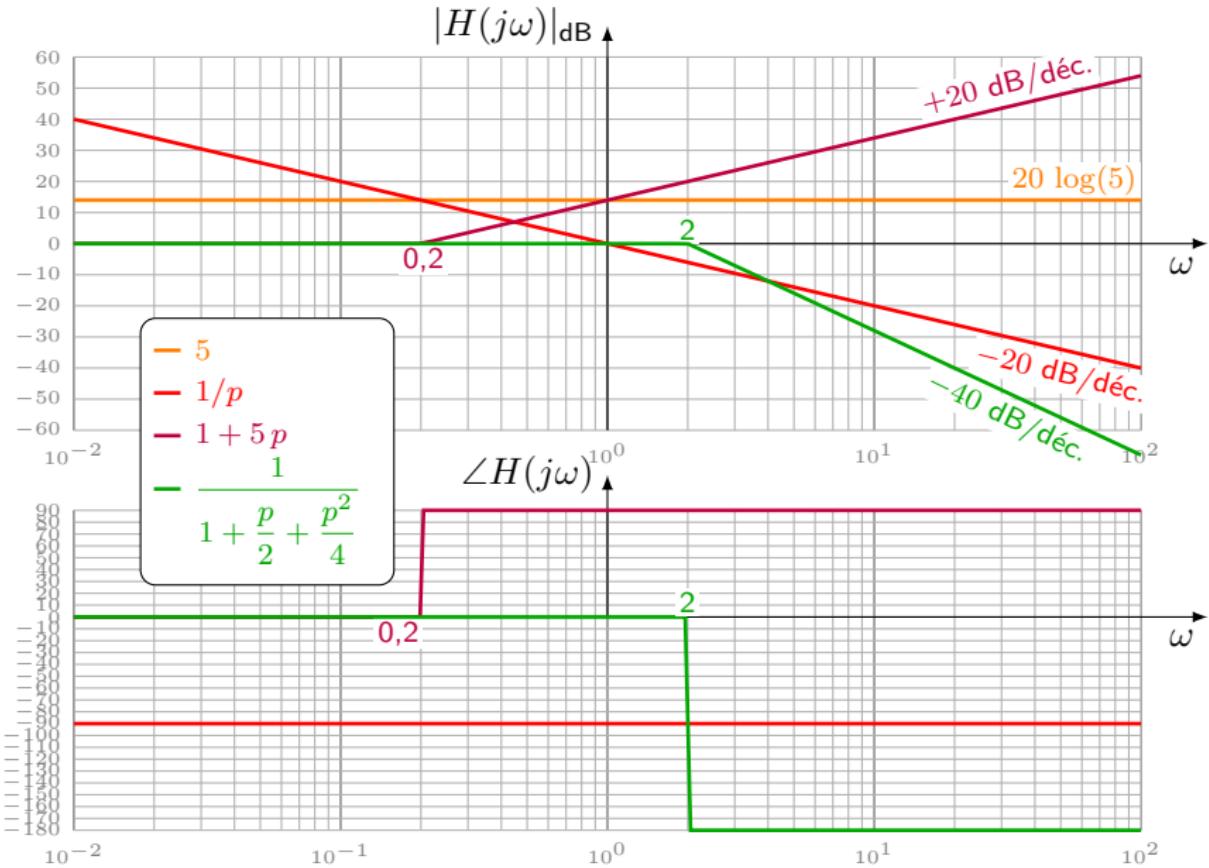
ici :  $\omega_0 = 2 \text{ rad/s} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \Rightarrow$  résonance

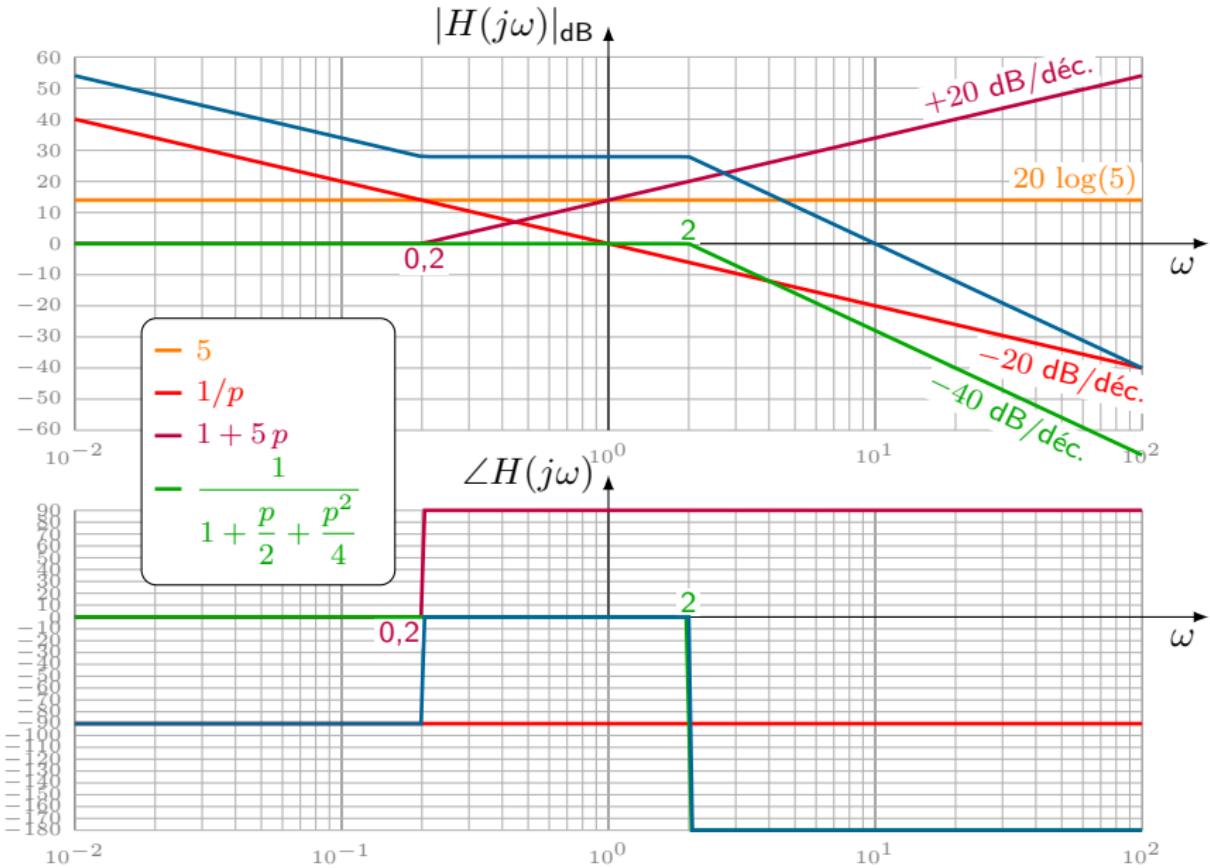
$$H_4(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}}$$

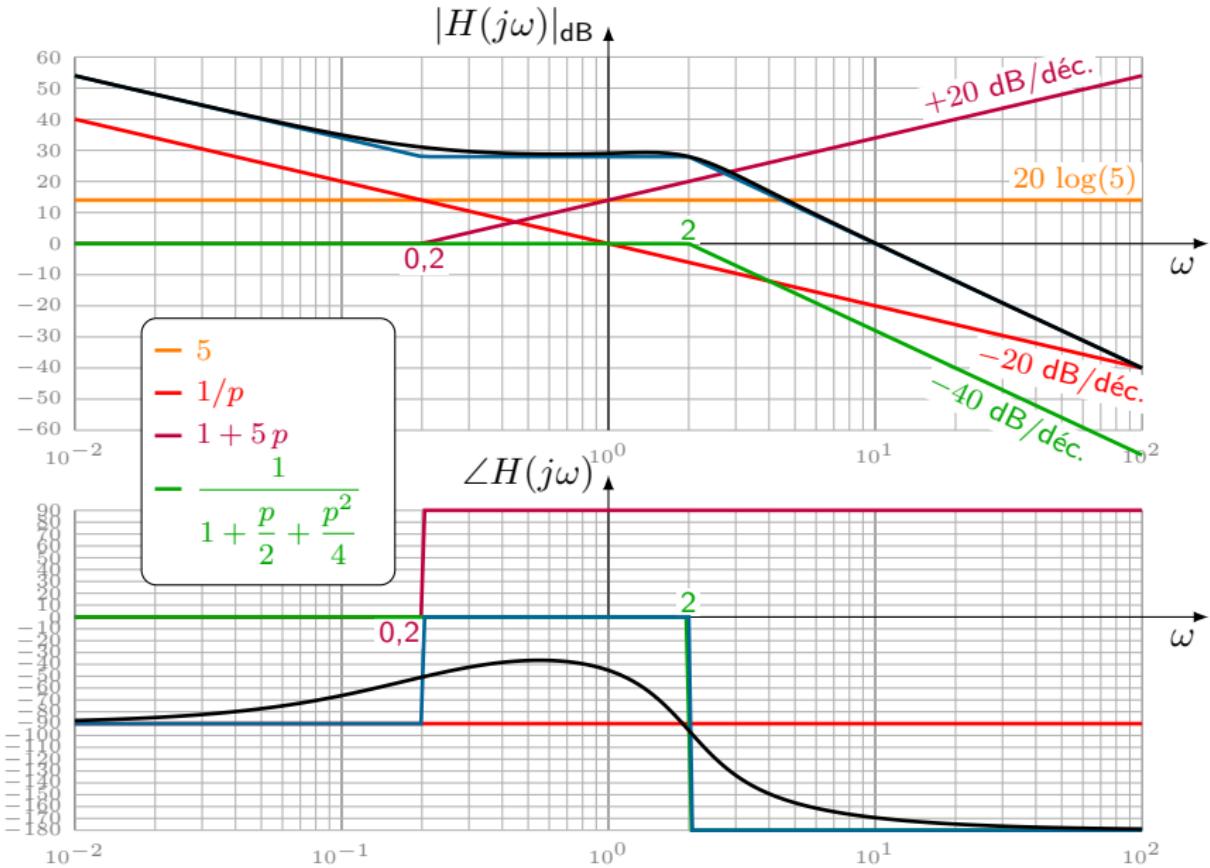














## Application à l'étude de la stabilité des systèmes

# Étude de la stabilité des systèmes

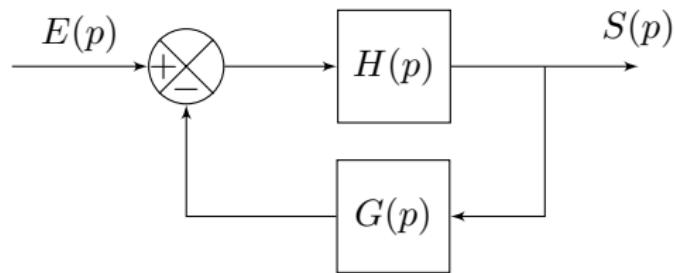
**Objectif d'un asservissement** : faire en sorte que la sortie du système suive le plus fidèlement possible un signal d'entrée.

**Condition nécessaire** : système stable.

# Étude de la stabilité des systèmes

**Objectif d'un asservissement** : faire en sorte que la sortie du système suive le plus fidèlement possible un signal d'entrée.

**Condition nécessaire** : système stable.



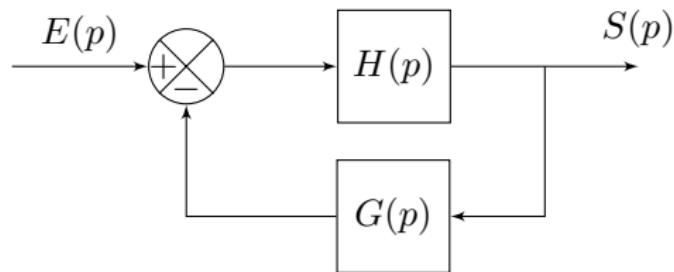
$$\text{FTBF}(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + \text{FTBO}(j\omega)} \quad \text{avec} \quad \text{FTBO}(j\omega) = H(j\omega)G(j\omega)$$

Si  $\text{FTBO}(j\omega) \rightarrow -1 \Rightarrow$  le système devient instable = résonance de la FTBF.

# Étude de la stabilité des systèmes

**Objectif d'un asservissement** : faire en sorte que la sortie du système suive le plus fidèlement possible un signal d'entrée.

**Condition nécessaire** : système stable.



$$\text{FTBF}(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + \text{FTBO}(j\omega)} \quad \text{avec} \quad \text{FTBO}(j\omega) = H(j\omega)G(j\omega)$$

Si  $\text{FTBO}(j\omega) \rightarrow -1 \Rightarrow$  le système devient instable = résonance de la FTBF.

**Système stable ?**

# Marges de stabilité

## Définition (Marge de gain)

La marge de gain  $M_G$  est la distance algébrique en dB mesurée entre la courbe de gain et l'axe des abscisses pour une pulsation  $\omega_{-\pi}$  telle que la phase soit de  $-180^\circ$  :

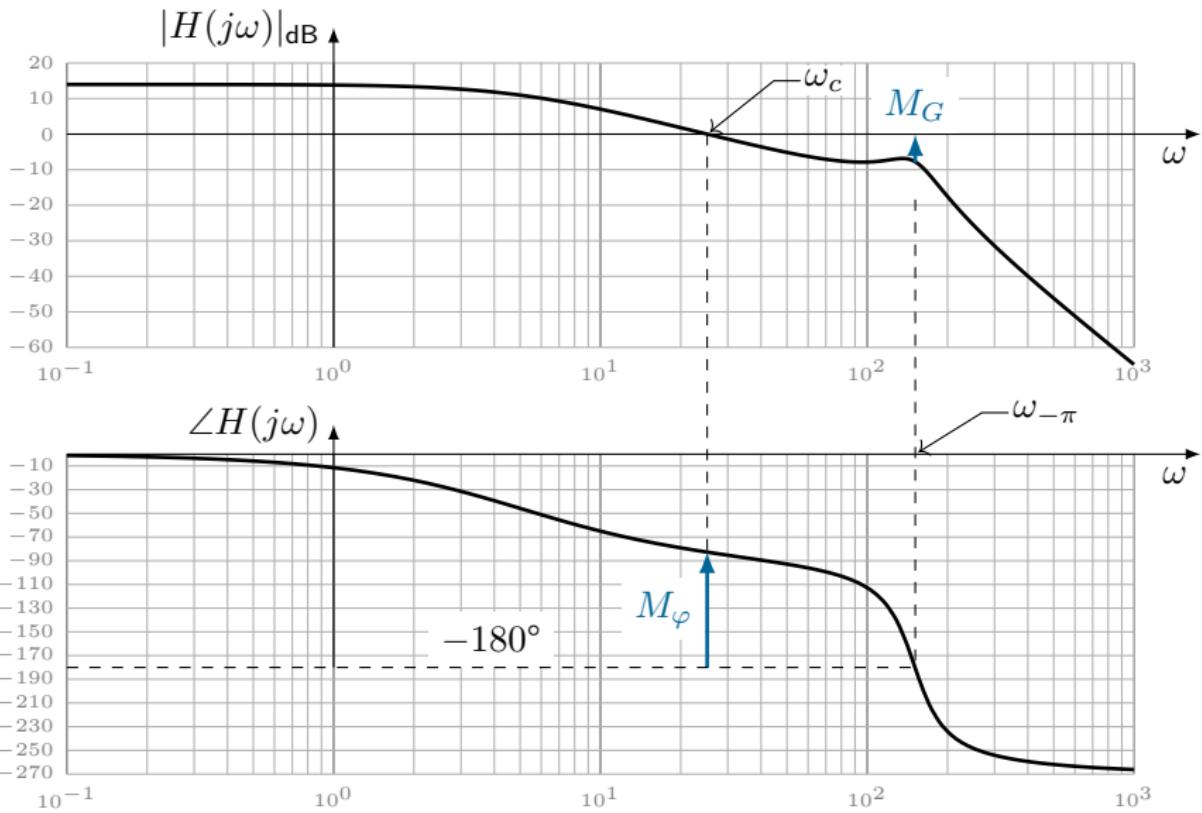
$$M_G = -|H(j\omega_{-\pi})|_{\text{dB}} \quad \text{avec} \quad \angle H(j\omega_{-\pi}) = -180^\circ$$

## Définition (Marge de phase)

La marge de phase  $M_\varphi$  est la distance algébrique en degré mesurée entre  $-180^\circ$  et la courbe de phase pour une pulsation de coupure  $\omega_c$  telle que le gain soit nul :

$$M_\varphi = 180^\circ + \angle H(j\omega_c) \quad \text{avec} \quad |H(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

# Marges de stabilité dans Bode





N. Mesnier, lycée international Jean Perrin, Lyon