

# Espaces vectoriels

Cours de É. Bouchet – PCSI

26 janvier 2026

## Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Espaces vectoriels</b>                                  | <b>2</b>  |
| 1.1 Définition et propriétés . . . . .                       | 2         |
| 1.2 Espaces vectoriels de référence . . . . .                | 3         |
| 1.3 Combinaison linéaire . . . . .                           | 4         |
| <b>2 Sous-espaces vectoriels</b>                             | <b>5</b>  |
| 2.1 Définition et caractérisation . . . . .                  | 5         |
| 2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels . . . . .        | 7         |
| 2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille . . . . . | 7         |
| <b>3 Familles finies de vecteurs</b>                         | <b>8</b>  |
| 3.1 Familles génératrices . . . . .                          | 8         |
| 3.2 Familles libres . . . . .                                | 10        |
| 3.3 Bases . . . . .  | 12        |
| <b>4 Somme de sous-espaces vectoriels</b>                    | <b>13</b> |
| 4.1 Définitions et premières propriétés . . . . .            | 13        |
| 4.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires . . . . .        | 15        |

Les espaces vectoriels introduisent un langage commun pour des situations a priori différentes (fonctions, polynômes, suites, matrices, ...). Ils permettent de résoudre avec la même méthode des problèmes de domaines différents. Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Espaces vectoriels

### 1.1 Définition et propriétés

#### Définition 1.1 (Espace vectoriel)

Soit  $E$  un ensemble non vide, muni d'une addition interne  $+$  :  $E \times E \rightarrow E$  et d'une multiplication externe  $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ . On dit que  $(E, +, \cdot)$  est un  **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** lorsque :

- L'opération interne  $+$  vérifie les propriétés suivantes :
  - pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x + y = y + x$  (la loi  $+$  est *commutative*),
  - pour tout  $(x, y, z) \in E^3$ ,  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (la loi  $+$  est *associative*),
  - il existe un unique  $e \in E$  appelé **élément neutre** tel que pour tout  $x \in E$ ,  $x + e = x = e + x$ .
  - pour tout  $x \in E$ , il existe  $x' \in E$  tel que  $x + x' = e = x' + x$ . Cet élément est unique, appelé **opposé** de  $x$ , et noté  $-x$ .
- L'opération externe  $\cdot$  vérifie les propriétés suivantes :
  - pour tout  $x \in E$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ ,  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
  - pour tout  $(x, y) \in E^2$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
  - pour tout  $x \in E$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
  - pour tout  $x \in E$ ,  $1 \cdot x = x$

On appelle **vecteurs** les éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et **scalaires** les éléments de  $\mathbb{K}$ .

*Démonstration.* On va montrer l'unicité de l'élément neutre et de l'opposé.

- Supposons qu'on a deux éléments neutres,  $e$  et  $e'$ . Alors, comme  $e$  et  $e'$  sont éléments neutres,  $e + e' = e'$  et  $e + e' = e$ . D'où  $e = e'$ , ce qui donne l'unicité de l'élément neutre.
- Soit  $x \in E$ , supposons que  $y$  et  $y'$  sont deux opposés de  $x$ . Alors  $y + x = e$  et  $y' + x = e$ . Or  $y' + x + y = y + x + y'$ , donc  $e + y = e + y'$ . Donc  $y = y'$ , d'où l'unicité de l'opposé.

□

**Exemple.** Les règles de calcul sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  donnent directement que  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Exemple.** Dans l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  :

- Si  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , on définit  $x + y$  comme  $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Il s'agit bien d'une opération interne dans  $\mathbb{R}^2$ , qui vérifie les propriétés :
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x$ .
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ ,
$$(x+y)+z = (x_1+y_1, x_2+y_2)+(z_1, z_2) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2) = (x_1, x_2)+(y_1+z_1, y_2+z_2) = x+(y+z).$$
  - il existe un élément  $e = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $x + e = x = e + x$ .
  - pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $x' = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x + x' = e = x' + x$ .
- Si  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on définit  $\alpha \cdot x$  comme  $(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Il s'agit bien d'une multiplication externe, qui vérifie les propriétés :

- pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  
 $(\alpha + \beta) \cdot x = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$
- pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  
 $\alpha \cdot (x + y) = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$
- pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha \beta x_1, \alpha \beta x_2) = (\alpha \beta) \cdot x.$
- pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $1 \cdot x = (x_1, x_2) = x.$

Donc  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exemple.** L'ensemble des vecteurs de l'espace, muni de l'addition de deux vecteurs et de la multiplication d'un réel par un vecteur, est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Son élément neutre est le vecteur nul.

**Remarque.** Le symbole de l'opération externe  $\cdot$  est parfois omis. Qu'il soit présent ou pas, il faut toujours placer le scalaire à gauche du vecteur.

**Remarque.** L'élément neutre pour  $+$  est souvent noté  $0_E$ , ou 0 lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

### Proposition 1.2 (Cas d'un produit valant $0_E$ )

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Alors  $\forall x \in E$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$  ou  $x = 0_E$ .

*Démonstration.* On montre successivement les deux implications, en commençant par la réciproque.

- Pour tout  $x \in E$ ,  $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ . D'où en ajoutant  $-0x$  des deux côtés,  $0x = 0_E$ .  
 De même, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda 0_E = \lambda(0_E + 0_E) = \lambda 0_E + \lambda 0_E$ . D'où  $\lambda 0_E = 0_E$ .
- Soit  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $\lambda x = 0_E$ . On suppose que  $\lambda \neq 0$ . En calculant de deux manières différentes,

$$\frac{1}{\lambda} \lambda x = \frac{1}{\lambda} 0_E = 0_E \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} \lambda x = \frac{\lambda}{\lambda} x = 1x = x.$$

D'où  $x = 0_E$ .

□

**Exemple.** Soit  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lambda \cdot x = (0, 0) \iff \lambda = 0$  ou  $x = (0, 0)$ .

### Proposition 1.3 (Construction de l'opposé)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Alors pour tout  $x \in E$ ,  $-x = (-1) \cdot x$ , où  $-x$  est l'opposé de  $x$  dans  $E$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in E$ ,  $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$ . Donc  $-x = (-1) \cdot x$ . □

## 1.2 Espaces vectoriels de référence

Pour montrer les résultats qui suivent, on vérifie mécaniquement toutes les propriétés.

### Proposition 1.4 ( $\mathbb{K}^n$ )

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Muni des opérations usuelles,  $\mathbb{K}^n$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $\mathbb{K}^n$  est le  $n$ -uplet  $(0, \dots, 0)$ .

### Proposition 1.5 ( $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ )

Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Muni de l'addition de deux matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est la matrice nulle de taille  $n \times p$ .

### Proposition 1.6 ( $\mathbb{K}[X]$ )

Muni de l'addition de deux polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un scalaire,  $\mathbb{K}[X]$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $\mathbb{K}[X]$  est le polynôme nul.

### Proposition 1.7 ( $E \times F$ )

Soit  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Muni des opérations usuelles, le produit cartésien  $E \times F$  est aussi un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $E \times F$  est  $(0_E, 0_F)$ .

### Proposition 1.8 ( $\mathcal{F}(\Omega, F)$ )

Soit  $\Omega$  un ensemble non vide et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Muni des opérations usuelles, l'ensemble  $\mathcal{F}(\Omega, F)$  des applications de  $\Omega$  dans  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** L'élément neutre de  $\mathcal{F}(\Omega, F)$  est l'application nulle de  $\Omega$  dans  $F$  (l'application qui à tout élément de  $\Omega$  associe  $0_F$ ).

**Remarque.**  $\Omega$  n'a pas besoin d'être un espace vectoriel pour que le résultat soit valide.

**Exemple.** L'ensemble  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Son élément neutre est la suite nulle.

**Exemple.** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble  $\mathbb{K}^A$  des applications de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Son élément neutre est la fonction nulle.

## 1.3 Combinaison linéaire

### Définition 1.9 (Famille finie de vecteurs)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une **famille finie de vecteurs** de  $E$  lorsque tous les  $e_i$  appartiennent à  $E$ .

**Exemple.**  $(1, 0), (0, 1, 3)$  et  $(1, 2, 2, 4)$  sont trois familles finies de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}$ .  
 $((1, 0), (2, 3), (2, 1))$  est une famille finie de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ .

### Définition 1.10 (Combinaison linéaire)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{S} = (e_k)_{1 \leq k \leq p}$  une famille finie de vecteurs de  $E$  et  $x \in E$ . On dit que  $x$  est **combinaison linéaire** des vecteurs de  $\mathcal{S}$  lorsqu'il existe  $p$  scalaires  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$  de  $\mathbb{K}$  tels que

$$x = \sum_{k=1}^p \alpha_k e_k.$$

**Exemple.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ . Alors il existe des scalaires  $(a_0, \dots, a_n)$  tels que  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , donc  $P$  est combinaison linéaire de  $(1, X, \dots, X^n)$ .

**Exercice 1.** Montrer que  $(4, 13)$  est combinaison linéaire de  $((1, 5), (2, 3))$ .

Solution : On résout (au brouillon) l'équation  $(4, 13) = \alpha_1(1, 5) + \alpha_2(2, 3)$ , d'inconnues  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  :

$$\begin{cases} 4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 13 = 5\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = 2 \text{ et } \alpha_2 = 1.$$

Rédaction finale : on remarque que  $(4, 13) = 2(1, 5) + (2, 3)$ , donc  $(4, 13)$  est combinaison linéaire de  $((1, 5), (2, 3))$ .

**Exercice 2.** Montrer que  $(1, 1)$  n'est pas combinaison linéaire de  $((0, 0), (0, 1), (0, 2))$ .

Solution : Supposons que  $(1, 1)$  soit combinaison linéaire des vecteurs. Alors il existe des réels  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  tels que  $(1, 1) = \alpha_1(0, 0) + \alpha_2(0, 1) + \alpha_3(0, 2)$ . Donc  $(1, 1) = (0, \alpha_2 + 2\alpha_3)$ . Donc  $1 = 0$ , ce qui est absurde. Donc  $(1, 1)$  n'est pas combinaison linéaire de  $((0, 0), (0, 1), (0, 2))$ .

## 2 Sous-espaces vectoriels

### 2.1 Définition et caractérisation

#### Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  une partie de  $E$  stable par combinaison linéaire. On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  lorsque  $(F, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** Dire que  $F$  est stable par combinaison linéaire signifie que toute combinaison linéaire d'éléments de  $F$  appartient à  $F$ .

**Exemple.** Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\{0_E\}$  (sous-espace nul) et  $E$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

#### Proposition 2.2 (Cas de l'élément neutre)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $0_E \in F$ .

*Démonstration.* Par propriétés des espaces vectoriels,  $F$  possède un élément neutre pour la loi  $+$ , qu'on note  $0_F$ .  $0 \in \mathbb{K}$ , donc la stabilité par combinaison linéaire donne  $0 \cdot 0_F \in F$ . Or  $0_F \in E$ , donc  $0 \cdot 0_F = 0_E$ . Donc  $0_E \in F$ .  $\square$

**Remarque.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , l'unicité de l'élément neutre donne donc  $0_F = 0_E$ .

#### Proposition 2.3 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (\alpha \cdot x) + y \in F.$$

*Démonstration.* Montrons le sens direct, puis la réciproque.

- Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , il contient  $0_E$  d'après le résultat précédent. De plus, il est stable par combinaison linéaire, donc  $\forall (x, y) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ , la combinaison linéaire  $(\alpha \cdot x) + y$  appartient à  $F$ . D'où le résultat annoncé.
- On suppose que  $0_E \in F$  et que  $\forall (x, y) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (\alpha \cdot x) + y \in F$ . On revient à la définition :
  - En prenant  $\alpha = 1$ , la relation garantit que l'opération  $+$  définie sur  $F \times F$  est à valeurs dans  $F$ .
  - En prenant  $y = 0_E \in F$ , la relation garantit que l'opération  $\cdot$  définie sur  $\mathbb{K} \times F$  est à valeurs dans  $F$ .
  - $0_E \in F$ , il existe donc un élément neutre dans  $F$ .
  - Soit  $x \in F$ . Comme  $-1 \in \mathbb{K}$ , alors  $-1 \cdot x \in F$ . Donc  $-x \in F$  et  $x$  admet un opposé dans  $F$ .
  - Les autres propriétés ne demandent aucune vérification car une relation vraie sur  $E$  l'est aussi sur  $F$ .

Donc  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. La relation garantit de plus la stabilité par combinaison linéaire, donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

□

**Remarque.** Pour montrer qu'un ensemble  $F$  est un espace vectoriel, revenir à la définition est peu pratique. Il est beaucoup plus rapide de montrer par la caractérisation ci-dessus que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

**Exercice 3.** Montrer que l'ensemble  $E$  des suites réelles convergentes est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Solution :

- La suite nulle converge (vers 0), donc est dans  $E$ .
- Soit  $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in E^2$ , on note  $\ell_1$  et  $\ell_2$  leurs limites réelles respectives. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda\ell_1 + \ell_2 \in \mathbb{R}$ . Donc  $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ .

Donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. Donc  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 4.** Montrer que l'ensemble  $D$  des suites réelles divergentes n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Solution :  $D$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  qui ne contient pas la suite nulle. Ce n'est donc pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 5.** L'ensemble  $E'$  des fonctions  $f$  définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et telles que  $f(0) = 0$  est-il un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

Solution :

- La fonction nulle est dans  $E'$  (car elle vaut 0 en 0).
- Soit  $(f, g) \in (E')^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda 0 + 0 = 0$ . Donc  $\lambda f + g \in E'$ .

Donc  $E'$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Donc  $E'$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $\mathbb{C}_n[X]$  des polynômes de degré au plus  $n$  est-il un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

Solution :

- $\deg(0) = -\infty \leq n$ , donc  $0 \in \mathbb{C}_n[X]$ .
- Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors  $\deg(\lambda P + Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg(Q))$ . Or  $\deg(Q) \leq n$  et  $\deg(\lambda P) \leq \deg(P) \leq n$ . Donc  $\deg(\lambda P + Q) \leq n$  et  $\lambda P + Q \in \mathbb{C}_n[X]$ .

Donc  $\mathbb{C}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$ . Donc  $\mathbb{C}_n[X]$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Variante de ce raisonnement en utilisant les coefficients plutôt que le degré :

- $0 = \sum_{k=0}^n 0X^k$ , donc  $0 \in \mathbb{C}_n[X]$ .
- Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors il existe  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  et  $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  tels que  $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$  et  $Q(X) = \sum_{k=0}^n \beta_k X^k$ . Donc

$$(\lambda P + Q)(X) = \sum_{k=0}^n (\lambda \alpha_k + \beta_k)(X).$$

Donc  $\lambda P + Q \in \mathbb{C}_n[X]$ .

Donc  $\mathbb{C}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$ . Donc  $\mathbb{C}_n[X]$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

## 2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

### Proposition 2.4 (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration.* Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- Par propriété des sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $0_E \in F$  et  $0_E \in G$ . Donc  $0_E \in F \cap G$ .
- Soit  $(x, y) \in (F \cap G)^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .  
Comme  $x \in F$ ,  $y \in F$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\lambda x + y \in F$ . De même,  $\lambda x + y \in G$ .  
Donc  $\lambda x + y \in F \cap G$ .

Donc  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . □

**Remarque.** Ce résultat se généralise à l'intersection de plus de deux sous-espaces vectoriels.

**Remarque.** Attention : de manière générale, la réunion de deux sous-espaces vectoriels de  $E$  n'est PAS un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice 7.**  $\{0\} \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \times \{0\}$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

Solution : Il contient  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ , mais pas leur somme  $(1, 1)$ , donc ce n'est pas un espace vectoriel.

## 2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille

### Définition 2.5 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{S} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . On note  $\text{Vect}(\mathcal{S})$  l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de  $\mathcal{S}$ .

$\text{Vect}(\mathcal{S})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* On revient à la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

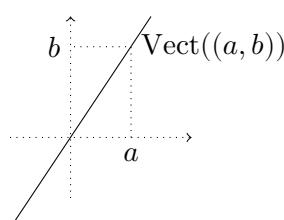
- $0_E = \sum_{k=1}^p 0e_k$ , donc  $0_E \in \text{Vect}(\mathcal{S})$ .
- Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $\text{Vect}(\mathcal{S})$ , et  $\lambda$  un scalaire. Donc  $\exists(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$  et  $\exists(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{K}^p$  tels que  $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^p y_i e_i$ . On peut alors écrire :

$$\lambda x + y = \lambda \sum_{i=1}^p x_i e_i + \sum_{i=1}^p y_i e_i = \sum_{i=1}^p (\lambda x_i + y_i) e_i \in \text{Vect}(\mathcal{S}).$$

Donc  $\text{Vect}(\mathcal{S})$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ . □

**Exemple.** D'après le cours sur les polynômes,  $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2)$ .

**Exemple.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\text{Vect}((a, b))$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  appelé droite vectorielle :



**Exemple.** Soit  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\text{Vect}((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2))$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , appelé plan vectoriel.

**Exemple.** Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ,  $\text{Vect}((\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}))$  est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (qui forme donc un espace vectoriel).

**Exercice 8.** Montrer que  $\text{Vect}((1, 2), (1, 0)) = \mathbb{R}^2$ .

Solution : L'inclusion  $\text{Vect}((1, 2), (1, 0)) \subset \mathbb{R}^2$  est immédiate. Réciproquement, soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(x, y) = \frac{y}{2}(1, 2) + \left(x - \frac{y}{2}\right)(1, 0) \in \text{Vect}((1, 2), (1, 0)),$$

d'où  $\mathbb{R}^2 \subset \text{Vect}((1, 2), (1, 0))$ . Par double inclusion, on a donc égalité des deux ensembles.

### Proposition 2.6 (Sous-espace contenant une famille)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{S} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Tout sous-espace vectoriel de  $E$  contenant les  $e_i$  contient  $\text{Vect}(\mathcal{S})$ .

*Démonstration.* Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant tous les  $e_i$  et soit  $x \in \text{Vect}(\mathcal{S})$ . Alors il existe  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$  tels que  $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ . On sait que  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $e_i \in F$ . Or  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , donc  $F$  est stable par combinaison linéaire. Donc  $x \in F$ . Cela montre  $\text{Vect}(\mathcal{S}) \subset F$ , d'où le résultat annoncé.  $\square$

### Proposition 2.7 (Cas d'un vecteur combinaison linéaire)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{S}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Si  $x \in \mathcal{S}$  est combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{S}$ , alors  $\text{Vect}(\mathcal{S}) = \text{Vect}(\mathcal{S}'')$ , où  $\mathcal{S}''$  est la famille obtenue en retirant  $x$  à  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* Soit  $x$  un vecteur de  $\mathcal{S}$  qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}''$  la famille obtenue en retirant  $x$  à  $\mathcal{S}$ .

- $\mathcal{S}$  contient tous les éléments de  $\mathcal{S}''$ , donc  $\text{Vect}(\mathcal{S}'') \subset \text{Vect}(\mathcal{S})$ .
- Réciproquement,  $\text{Vect}(\mathcal{S}'')$  est un espace vectoriel qui contient tous les éléments de  $\mathcal{S}''$  et leurs combinaisons linéaires, donc qui contient  $x$ . Donc  $\text{Vect}(\mathcal{S}'')$  contient tous les éléments de  $\mathcal{S}$ . Donc  $\text{Vect}(\mathcal{S}) \subset \text{Vect}(\mathcal{S}'')$ .

Donc par double inclusion,  $\text{Vect}(\mathcal{S}) = \text{Vect}(\mathcal{S}'')$ .  $\square$

**Exemple.**  $(3, 6) = 3(1, 2)$ , donc  $\text{Vect}((1, 2), (3, 6)) = \text{Vect}((1, 2)) = \{(\lambda, 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

## 3 Familles finies de vecteurs

### 3.1 Familles génératrices

#### Définition 3.1 (Famille génératrice)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{S}$  une famille finie d'éléments de  $E$ . La famille  $\mathcal{S}$  est dite **génératrice** de  $E$  lorsque  $\text{Vect}(\mathcal{S}) = E$ .

**Remarque.** L'inclusion  $\text{Vect}(\mathcal{S}) \subset E$  est évidente. Pour prouver que  $\mathcal{S}$  est génératrice de  $E$ , il suffit donc de montrer que  $E \subset \text{Vect}(\mathcal{S})$ , c'est-à-dire de montrer que tout  $x \in E$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{S}$ .

**Exemple.** Si  $P(X) \in \mathbb{K}_2[X]$ , alors il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$  tels que  $P(X) = aX^2 + bX + c$ . Les vecteurs  $X^2$ ,  $X$  et 1 sont bien dans  $\mathbb{K}_2[X]$ , donc  $(1, X, X^2)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

**Exercice 9.** La famille  $((1, 0), (1, 1))$  est-elle une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$  ?

Solution : Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On peut écrire  $(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$ . De plus  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$  sont bien des éléments de  $\mathbb{R}^2$ . Donc  $((1, 0), (1, 1))$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 10.** La famille  $((1, 0))$  est-elle une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$  ?

Solution :  $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ , montrons par l'absurde qu'il ne s'écrit pas comme combinaison linéaire des éléments de la famille. On suppose qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $(0, 1) = \lambda(1, 0) = (\lambda, 0)$ . Alors  $1 = 0$  : absurde. Donc la famille  $((1, 0))$  n'est pas génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 11.** Soit  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y\}$ . Montrer que c'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, dont on déterminera une famille génératrice.

Solution :

Méthode 1 : on gère les deux objectifs successivement.

- $0 = 2 \times 0$ , donc  $(0, 0, 0) \in E$ .
- Soit  $a = (x_a, y_a, z_a)$  et  $b = (x_b, y_b, z_b)$  deux éléments de  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\lambda a + b = (\lambda x_a + x_b, \lambda y_a + y_b, \lambda z_a + z_b)$ , et  $\lambda x_a + x_b = \lambda 2y_a + 2y_b = 2(\lambda y_a + y_b)$ , puisque  $a$  et  $b$  sont dans  $E$ . Donc  $\lambda a + b \in E$ .

$E$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . C'est donc un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit  $(x, y, z) \in E$ . Alors  $x = 2y$ . Donc

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = (2y, y, 0) + (0, 0, z) = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Or  $(2, 1, 0) \in E$  et  $(0, 0, 1) \in E$ . Donc  $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$  est une famille génératrice de  $E$ .

Méthode 2 : on gère les deux objectifs simultanément. Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$u \in E \iff x = 2y \iff u = (2y, y, z) \iff u = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \iff u \in \text{Vect}((2, 1, 0), (0, 0, 1)),$$

car on a bien  $(2, 1, 0) \in E$  et  $(0, 0, 1) \in E$ . Donc  $E = \text{Vect}((2, 1, 0), (0, 0, 1))$  ce qui redonne le même résultat.

### Proposition 3.2 (Famille contenant une famille génératrice)

Toute famille de vecteurs qui contient une famille génératrice de l'espace vectoriel  $E$  est une famille génératrice de l'espace vectoriel  $E$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S}$  une famille génératrice de  $E$  et  $\mathcal{S}'$  une famille de vecteurs qui contient les vecteurs de  $\mathcal{S}$ . Les propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés donnent directement  $\text{Vect}(\mathcal{S}) \subset \text{Vect}(\mathcal{S}') \subset E$ . Or  $\text{Vect}(\mathcal{S}) = E$  puisque  $\mathcal{S}$  est une famille génératrice de  $E$ . Donc  $\text{Vect}(\mathcal{S}') = E$  et  $\mathcal{S}'$  est aussi une famille génératrice de  $E$ .  $\square$

### Proposition 3.3 (Cas d'un élément combinaison linéaire des autres)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{S}$  est une famille génératrice de  $E$ . Si  $x \in \mathcal{S}$  est combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{S}$ , alors la famille  $\mathcal{S}'$  obtenue en retirant  $x$  à  $\mathcal{S}$  est aussi génératrice de  $E$ .

*Démonstration.* Les propriétés des sous-espaces vectoriels engendrés et des familles génératrices donnent directement  $E = \text{Vect}(\mathcal{S}) = \text{Vect}(\mathcal{S}')$ . Donc  $\mathcal{S}'$  est génératrice de  $E$ .  $\square$

## 3.2 Familles libres

**Définition 3.4** (Famille libre, famille liée)

Une famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de l'espace vectoriel  $E$  est dite **libre** lorsque pour tout  $p$ -uplet  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$  de scalaires de  $\mathbb{K}^p$ ,

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = 0_E \implies \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \alpha_k = 0.$$

On dit alors que les vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_p$  sont **linéairement indépendants**. Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

**Remarque.** Si  $x \in E$  et  $x \neq 0_E$ , alors la famille  $(x)$  est libre. En effet, soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , si on suppose  $\lambda x = 0_E$ , comme  $x \neq 0_E$ , alors  $\lambda = 0$ .

**Remarque.** Pour montrer qu'une famille est libre, on fixe  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$ , on suppose que  $\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = 0_E$  et on cherche à en déduire que tous les  $\alpha_i$  sont nuls.

**Exercice 12.** Montrer que la famille  $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$  obtenue précédemment est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .

Solution : Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . On suppose que  $\lambda(2, 1, 0) + \mu(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ . Alors  $(2\lambda, \lambda, \mu) = (0, 0, 0)$ , ce qui donne  $\lambda = \mu = 0$ . Donc  $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 13.** Montrer que  $((1, 2), (3, 6))$  est une famille liée.

Solution :  $-3 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (3, 6) = (0, 0)$ , alors que ni  $-3$  ni  $1$  ne sont nuls, la famille est donc liée.

**Proposition 3.5** (Unicité de la décomposition dans une famille libre)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $E$  est libre si et seulement si pour tous scalaires  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  de  $\mathbb{K}$ ,  $\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^p \beta_k e_k \implies \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_k = \beta_k$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  des scalaires. Le résultat annoncé découle directement de l'équivalence suivante :

$$\left( \sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^p \beta_k e_k \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_k = \beta_k \right) \Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^p (\alpha_k - \beta_k) e_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (\alpha_k - \beta_k) = 0 \right)$$

□

**Remarque.** La liberté d'une famille permet donc d'identifier les coefficients dans une égalité.

**Exercice 14.** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x$  et  $g(x) = e^{2x}$ . La famille  $(f, g)$  est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions réelles ?

Solution : Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Supposons que  $\lambda f + \mu g = 0$ . Alors pour tout  $x$  réel,  $\lambda e^x + \mu e^{2x} = 0$ . En particulier, on peut diviser par  $e^x > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \lambda + \mu e^x = 0$ . En prenant la limite pour  $x \rightarrow -\infty$ , on obtient  $\lambda = 0$ . Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \mu e^x = 0$ . La valeur en  $x = 0$  donne  $\mu = 0$ . On a montré que  $\lambda = \mu = 0$ , la famille est donc libre.

**Exercice 15.** Montrer que la famille  $(X + 2, X + 1, X^2)$  est libre dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Solution : Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ . On suppose que  $\alpha_1(X + 2) + \alpha_2(X + 1) + \alpha_3 X^2 = 0$ . En regroupant les coefficients, on trouve :

$$(2\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_3 X^2 = 0.$$

Par identification des coefficients du polynôme  $(0 = 0 + 0X + 0X^2)$ , on obtient  $2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$  et  $\alpha_3 = 0$ , ce qui donne en résolvant le système linéaire  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . La famille  $(1, X + 1, X^2)$  est donc libre dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Proposition 3.6** (Famille de polynômes échelonnée en degré)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(P_1, \dots, P_n)$  une famille de polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ . Si la famille est **échelonnée en degré** (c'est-à-dire si  $0 \leq \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$ ), alors elle est libre.

*Démonstration.* Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , on suppose que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k P_k(X) = 0$ .

Supposons que les  $\lambda_k$  ne sont pas tous nuls. On peut alors définir  $i = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket | \lambda_k \neq 0\}$ , ce qui donne  $\sum_{k=1}^i \lambda_k P_k(X) = 0$ . Or la famille est échelonnée en degré, donc  $P_i$  est de degré strictement supérieur aux autres polynômes de la somme. De plus,  $\lambda_i \neq 0$ , donc  $\deg(\sum_{k=1}^i \lambda_k P_k(X)) = \deg(P_i(X)) \geq 0$ . Or cette somme est égale au polynôme nul, qui est de degré  $-\infty$  : absurde.

Donc tous les  $\lambda_k$  sont nuls, donc la famille est libre.  $\square$

**Exemple.** La famille  $(1, (X+1)^5, (X-2)^7)$  est échelonnée en degrés, donc libre dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Proposition 3.7** (Sous-famille d'une famille libre)

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

*Démonstration.* Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une famille libre. On va montrer que  $(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$  reste libre, le résultat général se montre ensuite par récurrence décroissante.

Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$  des scalaires, on suppose que :  $\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k e_k = 0_E$ . Alors  $\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k e_k + 0 \cdot e_p = 0_E$ . Comme la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est libre, alors pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $\alpha_k = 0$ . Donc  $(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$  est une famille libre.  $\square$

**Proposition 3.8** (Cas d'un vecteur combinaison linéaire des autres)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $E$  est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

**Remarque.** En particulier toute famille qui contient l'élément neutre est liée, car si  $e_1 = 0_E$ ,  $e_1 = 0e_2 + \dots + 0e_p$ .

*Démonstration.* On fait la preuve en deux temps :

- Supposons que  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est liée. Alors il existe  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathbb{K}^p$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tels que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i e_i = 0_E$  et  $\alpha_j \neq 0$ . On peut donc écrire  $e_j = -\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} e_i - \sum_{i=j+1}^p \frac{\alpha_i}{\alpha_j} e_i$ .
- Réciproquement, on suppose qu'il existe  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $(\beta_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{j\}} \in \mathbb{K}^{p-1}$  tels que  $e_j = \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i e_i + \sum_{i=j+1}^p \beta_i e_i$ . En posant  $\beta_j = -1 \neq 0$ , on obtient  $\sum_{i=1}^p \beta_i e_i = 0_E$ , où les  $\beta_i$  ne sont pas tous nuls. La famille est donc liée.  $\square$

**Remarque.** Si on ajoute à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ses éléments, on obtient donc une nouvelle famille libre.

**Exercice 16.** La famille  $((0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 1, 1))$  est-elle libre ?

Solution : On cherche à montrer que la famille est libre. Soit  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  trois réels, on suppose que :

$$\lambda_1(0, 1, 2) + \lambda_2(0, 2, 1) + \lambda_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

On aurait alors  $(0, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$ , et donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = -3\lambda_2 \end{cases}$$

Cela ne permet pas de conclure directement, mais permet de construire un contre-exemple.

Rédaction finale :  $(0, 1, 1) = \frac{1}{3}(0, 1, 2) + \frac{1}{3}(0, 2, 1)$ , donc la famille est liée.

### 3.3 Bases

**Définition 3.9** (Base, coordonnées)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une **base** de  $E$  lorsque tout vecteur  $x$  de  $E$  peut s'écrire d'une manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_p$ .

On appelle alors **coordonnées** de  $x$  les coefficients de cette combinaison linéaire.

**Exemple.**  $(1, X, X^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et les coefficients de  $1 + 3X^2$  dans cette base sont 1, 0 et 3.

**Proposition 3.10** (Caractérisation des bases)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille finie d'éléments de  $E$  est une base de  $E$  si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de  $E$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie d'éléments de  $E$ .

- On suppose que  $\mathcal{S}$  est une base de  $E$ . La famille  $\mathcal{S}$  est composée d'éléments de  $E$  et tout vecteur de  $E$  peut être écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de  $\mathcal{S}$ , donc  $\mathcal{S}$  est une famille génératrice de  $E$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ , on suppose que  $\sum_{i=1}^p x_i e_i = 0_E$ . Comme  $0_E = \sum_{i=1}^p 0 e_i$ , l'unicité de la décomposition donne  $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ , donc  $\mathcal{S}$  est une famille libre.

- On suppose que  $\mathcal{S}$  est une famille libre et génératrice de  $E$ . Soit  $x \in E$ . Comme  $\mathcal{S}$  est génératrice,  $x$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{S}$ . Et comme  $\mathcal{S}$  est libre, cette décomposition en combinaison linéaire est unique. Donc  $\mathcal{S}$  est une base de  $E$ .

□

**Exercice 17.** Dans  $\mathbb{K}^n$ , on pose  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_k = (0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{ème position}}, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ . Montrer que  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  forme une base de  $\mathbb{K}^n$ .

Solution :

- Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ . On suppose que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_{\mathbb{K}^n}$ . Alors  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$ , et par identification des coefficients les  $\alpha_i$  sont tous nuls. La famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est donc libre.
- Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . On a alors  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Or  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_i \in \mathbb{K}^n$ . La famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est donc génératrice de  $\mathbb{K}^n$ .

La famille est libre et génératrice, c'est donc une base de  $\mathbb{K}^n$ .

**Remarque.** Plusieurs ensembles usuels ont des bases « naturelles », appelées **bases canoniques** :

| Espace vectoriel                | Base canonique associée  |
|---------------------------------|--|
| $\mathbb{K}^n$                  | $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$                   |
| $\mathbb{K}_n[X]$               | $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  |
| $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ | $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ |

On rappelle que  $E_{i,j}$  désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui placé à la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ième colonne, qui vaut 1.

**Exemple.** La famille  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  ou de  $\mathbb{C}^3$ .

**Exercice 18.** Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ .

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.
2. En déterminer une base.

Solution :

1.
  - La suite nulle vérifie la relation de récurrence proposée, donc appartient à  $E$ .
  - Soit  $u$  et  $v$  deux suites de  $E$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$(\lambda u + v)_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + u_n) + v_{n+1} + v_n = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n) = (\lambda u + v)_{n+1} + (\lambda u + v)_n.$$

Donc  $\lambda u + v \in E$ .

Donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles. Donc c'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2.
  - Soit  $u \in E$ , c'est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, d'équation caractéristique  $X^2 = X + 1$ , dont les solutions sont  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . D'après le cours sur les suites réelles, il existe donc deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Or  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left( 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2}$  (car  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est solution de l'équation caractéristique, donc  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$ ). Donc  $(\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ .

On montre de même que  $(\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ . Donc  $((\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n)_{n \in \mathbb{N}})$  est une famille génératrice de  $E$ .

- Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels, on suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 0$ . On trouve en particulier pour  $n = 0$  et  $n = 1$  que  $\lambda + \mu = 0$  et  $\lambda \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0$ . Donc  $\lambda = -\mu$  et  $\mu \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = 0$ . Cela donne  $\lambda = \mu = 0$ . Donc  $((\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n)_{n \in \mathbb{N}})$  est une famille libre de  $E$ .

Donc  $((\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n)_{n \in \mathbb{N}})$  est une base de  $E$ .

## 4 Somme de sous-espaces vectoriels

### 4.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 4.1** (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . L'ensemble des éléments de  $E$  s'écrivant sous la forme de la somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé **somme des sous-espaces vectoriels**  $F$  et  $G$ . On note  $F + G = \{x + y | (x, y) \in F \times G\}$ .

*Démonstration.* Montrons qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de  $E$  :

- $0_E \in F$  et  $0_E \in G$ , puisque  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Donc  $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$ .
- Soit  $(u, v) \in (F + G)^2$  et  $\lambda$  un scalaire. Alors  $\exists (u_F, u_G) \in F \times G$  tels que  $u = u_F + u_G$  et  $\exists (v_F, v_G) \in F \times G$  tels que  $v = v_F + v_G$ . Donc

$$\lambda u + v = \lambda(u_F + u_G) + (v_F + v_G) = (\lambda u_F + v_F) + (\lambda u_G + v_G).$$

Or  $\lambda u_F + v_F \in F$  et  $\lambda u_G + v_G \in G$  puisque  $F$  et  $G$  sont stables par combinaison linéaire. Donc  $\lambda u + v \in F + G$ .

Donc  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . □

### Proposition 4.2 (Somme d'espaces vectoriels engendrés)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  deux familles finies d'éléments de  $E$ . On note  $\mathcal{S}$  la famille qui juxtapose les vecteurs de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Alors  $\text{Vect}(\mathcal{S}_1) + \text{Vect}(\mathcal{S}_2) = \text{Vect}(\mathcal{S})$ .

*Démonstration.* Il suffit de revenir à la définition. □

**Remarque.** Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on obtient donc une famille génératrice de  $F + G$  en juxtaposant des familles génératrices de  $F$  et de  $G$ .

**Exercice 19.** On se place dans  $\mathbb{R}[X]$ . Que vaut  $\mathbb{R}_1[X] + \text{Vect}(X^2)$  ?

Solution :  $\mathbb{R}_1[X] + \text{Vect}(X^2) = \text{Vect}(1, X) + \text{Vect}(X^2) = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$ .

### Définition 4.3 (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que la somme  $F + G$  est une **somme directe** lorsque tout élément  $u$  de  $F + G$  s'écrit de manière unique sous la forme  $u = x + y$ , avec  $(x, y) \in F \times G$ . La somme est alors notée  $F \oplus G$ .

**Remarque.** La définition de  $F + G$  donne l'existence de cette décomposition, il suffit donc de montrer l'unicité pour conclure que la somme est directe.

### Proposition 4.4 (Caractérisation des sommes directes)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . La somme  $F + G$  est une somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0_E\}$ .

*Démonstration.* On procède en deux temps :

- Supposons que  $F \cap G = \{0_E\}$ . Soit  $u \in F + G$ , supposons qu'il existe  $(x_1, y_1) \in F \times G$  et  $(x_2, y_2) \in F \times G$  tels que  $u = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ . Alors :

$$\underbrace{x_1 - x_2}_{\in F} = \underbrace{y_1 - y_2}_{\in G}.$$

Donc  $x_1 - x_2 \in F \cap G = \{0_E\}$ , c'est-à-dire  $x_1 = x_2$ . De même,  $y_1 = y_2$ . La décomposition de  $u$  est donc unique. Donc  $F + G$  est une somme directe.

- Réciproquement, supposons que  $F + G$  est une somme directe. Soit  $u \in F \cap G$ , on peut le décomposer comme  $u = u + 0$  et comme  $u = 0 + u$ . L'unicité de la décomposition donne  $u = 0_E$ . Donc  $F \cap G \subset \{0_E\}$ , donc  $F \cap G = \{0_E\}$ .

□

**Remarque.** Comme  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , on a toujours  $\{0_E\} \subset F \cap G$ . Il suffit donc de montrer que  $F \cap G \subset \{0_E\}$  pour montrer qu'une somme est directe.

**Exercice 20.** Montrer que la somme  $\mathbb{R}_1[X] + \text{Vect}(X^2)$  est directe.

Solution : Soit  $P(X) \in \mathbb{R}_1[X] \cap \text{Vect}(X^2)$ . Alors  $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $P(X) = aX + b$  et  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $P(X) = \lambda X^2$ . Donc  $aX + b = \lambda X^2$ , et par identification des coefficients des polynômes  $a = b = \lambda = 0$ . Donc  $P(X) = 0$ . On en déduit que  $\mathbb{R}_1[X] \cap \text{Vect}(X^2) = \{0\}$ , c'est-à-dire que la somme est directe.

Remarque : avec l'exercice 19, on a donc montré que  $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Vect}(X^2)$ .

## 4.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

**Définition 4.5** (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)

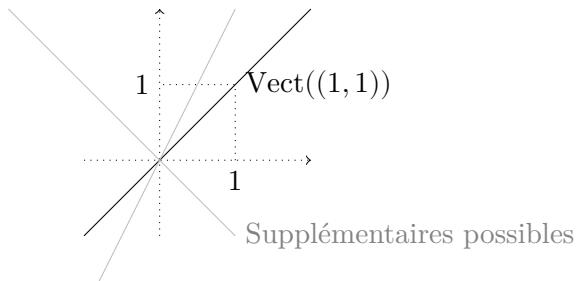
Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  lorsque  $E = F \oplus G$ .

**Remarque.** Des méthodes pratiques de construction de supplémentaire seront étudiées dans un prochain chapitre.

**Remarque.** Un même espace vectoriel peut avoir plusieurs supplémentaires différents.

**Exemple.**  $\text{Vect}(X^2)$  et  $\text{Vect}(X^2 + 1)$  sont deux supplémentaires de  $\mathbb{R}_1[X]$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  (on a montré  $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Vect}(X^2)$  dans l'exercice 20, l'égalité  $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Vect}(X^2 + 1)$  s'établit de la même manière).

**Exemple.** Les supplémentaires d'une droite du plan passant par 0 sont toute autre droite du plan passant par 0. Par exemple, les supplémentaires de  $\text{Vect}((1, 0))$  dans  $\mathbb{R}^2$  sont les ensembles de la forme  $\text{Vect}((a, b))$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .



**Exemple.** Les supplémentaires d'un plan  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  passant par 0 sont toute droite du plan passant par 0 et non incluse dans le plan  $P$ .

**Exercice 21.** Soit  $n$  un entier naturel non nul, on se place dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Solution :

- La matrice nulle est symétrique. De plus, soit  $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top = \lambda A + B$ , donc  $\lambda A + B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Donc  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- On montre de même (en changeant les signes des transposées) que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Montrons par analyse-synthèse que toute matrice s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - Analyse : on suppose qu'il existe  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  tels que  $A = B + C$ . Alors :

$$A^\top = B^\top + C^\top = B - C.$$

Sommer les deux relations donne  $A + A^\top = 2B$ , et donc  $B = \frac{A+A^\top}{2}$ . On en déduit ensuite  $C = \frac{A-A^\top}{2}$ .

– Synthèse : on pose  $B = \frac{A+A^\top}{2}$  et  $C = \frac{A-A^\top}{2}$ . Il est immédiat que  $A = B + C$ . De plus,

$$B^\top = \frac{A^\top + A}{2} = B \text{ et } C^\top = \frac{A^\top - A}{2} = -C,$$

donc  $B$  est symétrique et  $C$  antisymétrique. Ces valeurs de  $B$  et  $C$  sont donc solution du problème.

Il existe donc bien une unique décomposition de  $A$  comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique, donc  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .