

# Relations asymptotiques

Cours de É. Bouchet – PCSI

5 janvier 2026

## Table des matières

<b>1 Relation d'équivalence entre fonctions</b>	<b>2</b>
1.1 Définition et premières propriétés . . . . .	2
1.2 Calculs et équivalents usuels . . . . .	2
1.3 Adaptation au cas des suites . . . . .	3
<b>2 Relations de domination et de négligeabilité entre fonctions</b>	<b>4</b>
2.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	4
2.2 Calculs et relations classiques . . . . .	5
2.3 Adaptation au cas des suites . . . . .	6

Dans tout le chapitre, on notera  $\bar{\mathbb{R}}$  l'ensemble constitué de  $\mathbb{R}$ ,  $+\infty$  et  $-\infty$ . Les fonctions et suites considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

## 1 Relation d'équivalence entre fonctions

### 1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1.1** (Fonctions équivalentes au voisinage d'un point)

Soit  $a \in \bar{\mathbb{R}}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage  $V_a$  de  $a$ , telles que  $g$  ne s'annule pas sur  $V_a$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes au voisinage de  $a$**  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ . On note alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

**Exemple.** On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ , donc  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

**Exercice 1.** Déterminer un équivalent simple en  $+\infty$  de  $x + e^x$ .

**Proposition 1.2** (Transitivité des équivalents)

Soit  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ , et  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies au voisinage de  $a$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ .

**Proposition 1.3** (Équivalents et limites)

Soit  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$ .
- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existe, alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe et ces deux limites sont égales.

**Remarque.** Attention, le premier résultat ne fonctionne plus si  $\ell = 0$ . Montrer un équivalent à 0 doit alerter, c'est le plus souvent signe d'une erreur dans l'application de cette propriété.

**Proposition 1.4** (Obtention d'un équivalent par encadrement)

Soit  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ , et  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies au voisinage de  $a$ . Si  $f \leq g \leq h$  au voisinage de  $a$  et si  $h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ , alors  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ .

**Proposition 1.5** (Équivalents et signe de la fonction)

Soit  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$ .

- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  alors  $f$  non plus.
- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et si  $g$  est positive au voisinage de  $a$ , alors  $f$  l'est également.

### 1.2 Calculs et équivalents usuels

**Proposition 1.6** (Produit et quotient d'équivalents)

Soit  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ , et  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  des fonctions définies au voisinage de  $a$ . Si  $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$  et si  $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$  alors  $(f_1 f_2)(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g_1 g_2)(x)$ . Si de plus  $g_2$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , alors  $\frac{f_1}{f_2}(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}(x)$ .

### Proposition 1.7 (Équivalents et passage à la puissance)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors  $f(x)^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^\alpha$  dès que les puissances sont bien définies.

**Remarque.** Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les fonctions si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , pour toutes les fonctions ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  si  $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$  et pour toutes les fonctions strictement positives au voisinage de  $a$  si  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Proposition 1.8 (Équivalents et passage à la valeur absolue)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors  $|f(x)| \underset{x \rightarrow a}{\sim} |g(x)|$ .

### Proposition 1.9 (Équivalents et composition à droite)

Soit  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ . Soit  $f$  et  $g$  des fonctions définies au voisinage de  $a$  et  $h$  une fonction définie au voisinage de  $b$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$ , alors  $f(h(x)) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(h(x))$ .

**Remarque.** ATTENTION ! Toute autre opération est interdite, notamment la composition à gauche d'un équivalent par une fonction et la somme d'équivalents.

### Proposition 1.10 (Équivalents usuels au voisinage de zéro)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  fixé,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & e^x - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \cos(x) - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2, & (1+x)^\alpha - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x, \\ \operatorname{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \operatorname{ch}(x) - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2, & \tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \arctan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \end{aligned}$$

**Remarque.** Par la suite, les développements limités fourniront un moyen plus rapide de retrouver ces résultats.

**Remarque.** Écrire  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$  sont deux choses très différentes (on a de la chance qu'elles soient vraies toutes les deux, puisqu'il est interdit de sommer des équivalents et donc de rajouter +1 des deux côtés). La première relation donne la vitesse à laquelle exponentielle converge vers 1 en 0. La deuxième signifie seulement que  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$  (puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1} = 1$ ), ce qui donne la limite, mais pas la vitesse de convergence.

**Exercice 2.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2}$ . Déterminer un équivalent de  $f$  au voisinage de 0.

**Exercice 3.** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ . Déterminer un équivalent de  $g$  au voisinage de  $+\infty$ .

## 1.3 Adaptation au cas des suites

### Définition 1.11 (Suites équivalentes)

Soit  $u$  et  $v$  deux suites. Si  $v$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on dit que les suites  $u$  et  $v$  sont équivalentes quand  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ . On note alors  $u_n \sim v_n$ .

**Remarque.** On peut aussi écrire  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , mais comme la limite d'une suite s'effectue toujours en  $+\infty$ , la précision est superflue.

**Remarque.** Les propriétés sont les mêmes que dans le cas des fonctions : transitivité, gestion des limites, conservation du signe, possibilité de réaliser des produits/quotients, de passer à la puissance  $\alpha$  ou de composer à droite.

ATTENTION ! Toute autre opération sur les équivalents est interdite, notamment la composition à gauche et la somme.

**Exercice 4.** Calculer la limite de la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

**Exercice 5.** Calculer la limite de la suite définie pour  $n \geq 3$  par  $u_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n}$ .

**Exercice 6.** Soit  $k \in \mathbb{N}$  (fixé). Montrer que  $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ .

## 2 Relations de domination et de négligeabilité entre fonctions

### 2.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 2.1** (Fonction négligeable devant une autre fonction)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage  $V_a$  de  $a$ , telles que  $g$  ne s'annule pas sur  $V_a$ . On dit que  $f$  est **négligeable devant**  $g$  au voisinage de  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . On note alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ .

**Définition 2.2** (Fonction dominée par une autre fonction)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage  $V_a$  de  $a$ , telles que  $g$  ne s'annule pas sur  $V_a$ . On dit que  $f$  est **dominée par**  $g$  au voisinage de  $a$  lorsque  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$ . On note alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ .

**Exemple.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^4} = 0$ , donc  $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^4)$ . À l'inverse,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2} = 0$ , donc  $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ .

D'autre part,  $\frac{5x^4+x}{x^4}$  est borné au voisinage de  $+\infty$  (puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4+x}{x^4} = 5$ ), donc  $5x^4 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^4)$ .

**Remarque.** Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  ou  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ . En effet, si  $\frac{f(x)}{g(x)}$  admet une limite finie en  $a$ , elle est bornée au voisinage de ce point. La réciproque est par contre fausse.

**Proposition 2.3** (Comparaisons avec 1)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$ .

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1) &\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \\ f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(1) &\iff f \text{ est bornée au voisinage de } a. \end{aligned}$$

**Exercice 7.** Simplifier au maximum la relation  $o(1) + O(1)$  (pour  $x \rightarrow 0$ ), en restant le plus précis possible.

**Exercice 8.** Simplifier au maximum la relation  $O(1) - O(1)$  (pour  $x \rightarrow 0$ ), en restant le plus précis possible.

**Proposition 2.4** (Lien entre équivalence et négligeabilité)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f, g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$ . Alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)).$$

**Remarque.** Dans un souci de simplification des calculs et des écritures, on peut écrire  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$  en lieu et place de  $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ .

**Remarque.** Ce résultat est extrêmement utile pour contourner l'interdiction de sommer des équivalences, d'autant plus que les développements limités fourniront un moyen facile d'obtenir des relations exploitables.

**Exemple.** On admet pour le moment que  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2})$ . Alors  $e^x - 1 - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ .

Dans la suite, on se concentrera sur l'étude des négligeabilités (davantage utilisées), mais les résultats suivants restent valables si on remplace les  $o$  par des  $O$  dans leurs énoncés.

**Proposition 2.5** (Équivalents dans une négligeabilité)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f, g, h$  des fonctions définies au voisinage de  $a$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ .

**Exercice 9.** Simplifier au maximum la relation  $o(x^2 + 2x)$  (pour  $x \rightarrow +\infty$ ), en restant le plus précis possible.

**Proposition 2.6** (Transitivité des fonctions négligeables)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies au voisinage de  $a$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ .

## 2.2 Calculs et relations classiques

**Proposition 2.7** (Somme de fonctions négligeables)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f_1, f_2, g$  des fonctions définies au voisinage de  $a$ . Si  $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  et  $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  alors  $f_1(x) + f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ .

**Exercice 10.** Simplifier au maximum la relation  $o(x) + o(x^2)$  (pour  $x \rightarrow 0$ ), en restant le plus précis possible.

**Proposition 2.8** (Produit de fonctions négligeables)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f_1, f_2, g_1, g_2$  des fonctions définies au voisinage de  $a$ .

Si  $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g_1(x))$  et  $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g_2(x))$  alors  $f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g_1(x)g_2(x))$ .

**Remarque.** On montre de même que si  $f, g$  et  $h$  sont définies au voisinage de  $a$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ , alors on a aussi  $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)h(x))$ .

**Remarque.** Il est par contre interdit de quotienter des relations de négligeabilité (puisque l'inverse d'un terme qui converge vers 0 diverge).

**Proposition 2.9** (Cas d'une constante multiplicative)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\lambda$  une constante et  $f, g$  des fonctions définies au voisinage de  $a$ .

Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ , alors  $\lambda f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ .

**Exemple.**  $o(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ .

### Proposition 2.10 (Fonctions négligeables et passage à la puissance)

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  alors  $f(x)^\alpha \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)^\alpha)$  dès que les puissances sont bien définies.

**Remarque.** Attention : contrairement au cas des équivalences, il faut  $\alpha > 0$  pour que cela fonctionne.

**Remarque.** Comme dans le cas des fonctions équivalentes, ce résultat permet de passer à la valeur absolue dans des relations de négligeabilité.

### Proposition 2.11 (Fonctions négligeables et composition à droite)

Soit  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ . Soit  $f$  et  $g$  des fonctions définies au voisinage de  $a$  et  $h$  une fonction définie au voisinage de  $b$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  et  $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$ , alors  $f(h(x)) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(h(x)))$ .

**Remarque.** La composition à gauche est toujours interdite.

### Proposition 2.12 (Négligeabilités classiques)

Soit  $\alpha, \beta, a$  et  $b$  des réels. Alors :

$$\begin{aligned} x^\alpha &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta) & \text{lorsque } \alpha < \beta, \\ x^\beta &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha) & \text{lorsque } \alpha < \beta, \\ (\ln(x))^\beta &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha) & \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0, \\ (\ln|x|)^\beta &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(\frac{1}{x^\alpha}) & \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0, \\ x^\alpha &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(a^x) & \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } a > 1, \\ a^x &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(b^x) & \text{lorsque } |a| < |b|. \end{aligned}$$

## 2.3 Adaptation au cas des suites

### Définition 2.13 (Suites négligeables)

Soit  $u$  et  $v$  deux suites. On suppose que  $v$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que  $u$  est **négligeable** devant  $v$  lorsque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ . On note alors  $u_n = o(v_n)$ .

### Définition 2.14 (Suites dominées)

Soit  $u$  et  $v$  deux suites. On suppose que  $v$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que  $u$  est **dominée** par  $v$  lorsque  $\frac{u}{v}$  est bornée. On note alors  $u_n = O(v_n)$ .

**Remarque.** Les propriétés sont les mêmes que dans le cas des fonctions : comparaison à 1, relation entre équivalences et négligeabilité, transitivité, possibilité de réaliser des sommes/produits, de passer à la puissance  $\alpha > 0$  ou de composer à droite.

ATTENTION ! Toute autre opération est interdite, notamment la composition à gauche et le quotient.

**Exercice 11.** Soit  $(u_n)$  une suite qui vérifie  $u_n = -2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .  
Déterminer les limites de  $(u_n)$ ,  $((u_n + 2)n)$  et  $((u_n + 2 - \frac{3}{n})n^2)$ .