Relations asymptotiques

Exercice 1 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $n+2$
2. $\frac{1}{n}+2$
3. $3e^{2n}+2n^4$
4. $e^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{1}{n^2})-1\right)$
5. $\frac{1}{2n^2}-\frac{3}{n}+e^{-n}$
6. $(n+2)e^{n+3}$
7. $(n^2+n+1)\ln(n)$
8. $\frac{3}{5n^2+1}$
9. $(2n-\ln(n))^3$
10. $\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)}$
11. $\sqrt{4-\frac{4}{n}}-2$
12. $\left(\frac{n+e^n}{1+e^{2n}}\right)^2$
13. $\sqrt{\frac{2}{n^4}+\frac{2}{n^2}}$
14. $\frac{n\ln(n^2+n)+2n}{(n+1)^2\ln(n^5+1)}$
15. $\frac{(1+n)^2}{\cos(\frac{1}{n})}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$
16. $\ln(1+n)-\ln(n)$

Exercice 2 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ puis lorsque $x \to 0$ (ou parfois 0^+) de :

1. $2+3x$
2. $2x^2-5x+7$
3. $x^4-2+\frac{4}{x}$
4. $\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$
5. $\frac{x^3+1}{\ln(1+x^2)}$
6. $5\ln(x)+2$
7. $5\ln(x)+2x$
8. $5\ln(x)+\frac{2}{x}$
9. $\frac{1}{2x+3}$
10. $3e^x+x-1$
11. $\frac{x-3x^3}{2x^2+x^4}$
12. $\frac{3x^2}{x^2+x^3}$
13. $\frac{2e^x+x^2+3}{e^{2x}+x^3}$
14. $\frac{x^2\ln(2+x+e^x)}{x+x^2}$
15. $\frac{1}{3x-2}$
16. $\left(\ln(2x+4x^4)\right)^2$
17. $\ln(1+2x+3x^2)$

Exercice 3 (★★). Trouver un équivalent simple de $\ln\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 4 (★★). Soit u une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ qui vérifie $\ln\left(\frac{2}{u_n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Montrer que u converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $(u_n-\ell)$.

Exercice 5 (★★). Soient u et v deux suites à valeurs strictement positives telles que $u_n \sim v_n$ et qui vérifient $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$.

1. Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2. Montrer qu'on n'a pas forcément $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
3. Application : déterminer un équivalent de $\frac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln(n)}$ et de $\frac{n^2+1}{\ln(e^n+n)}$.

Exercice 6 (★). Simplifier au maximum les expressions suivantes, en restant le plus précis possible.

1. $n^2O(n^3)$
2. $\frac{1}{n^2}o(n)$
3. $o(n^2)\times o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
4. $o(e^{-n})\times O(n)$
5. $O(\ln(n))\times O\left(\frac{1}{n^3}\right)$
6. $\left(\frac{3}{\ln(n)}\right)o(n^2)\times o(e^{-n})$
7. $2o(\sqrt{n})+o(\sqrt{n})$
8. $O\left(\frac{1}{n}\right)-O\left(\frac{1}{n}\right)$
9. $o(e^{-n})-2O(e^{-n})$
10. $\frac{1}{n}(o(\ln(n))-o(\ln(n)))$
11. $e^n+O(e^n)$
12. $o(n^2)+o(n^3)$
13. $o(e^{-n})+o(e^{-2n})$
14. $\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)$
15. $n+o(n\ln(n))+o(\ln(n))$

Exercice 7 (★).

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes (les O et o sont en $x \to +\infty$), en restant le plus précis possible.

   (a) $o(x+1)$
   (b) $o(5x^2)-o(2x^3)$
   (c) $O(x)-O(x^2)$
   (d) $\ln(x)\left(o(x)+o(x^2)\right)$
   (e) $O(2+x-3x^4)$
   (f) $o\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)$
   (g) $o\left(x^2-2-\frac{1}{x^3}\right)$
   (h) $o\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$
   (i) $o\left(\frac{1}{x+2}\right)$

2. Réaliser le même travail avec cette fois-ci les O et o en $x \to 0$ (0^+ lorsqu'on utilise un logarithme).

Exercice 8 (★). Vrai ou faux ? Justifier.

1. $n^2 = o(e^n)$
2. $\sqrt{n} = o(n)$
3. $n^5 = o(e^n)$
4. $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$
5. $\frac{1}{\ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $5n^4-3n^2-1 = O(n^4)$
7. $o(n^2) = o(n^3)$
8. $o(n^3) = o(n^2)$

Exercice 9 (★). Simplifier au maximum (et sans perdre de précision) les expressions suivantes (les O et o sont en $x \to 0$) :

1. $1+2x-x^2+o(x)$
2. $5x^5-3x^2+o(x^3)$
3. $-2+x^2-x^3+o(x+1)$
4. $1+\frac{1}{x}-x^2+o(x-x^2)$
5. $\frac{1}{x^2}+1-x+o\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 10 (★★). Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, avec $b > 0$. On considère la suite u qui vérifie $u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Est-elle monotone à partir d'un certain rang ?

Exercice 11 (★★). Soit $q > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n = \frac{q^n}{n!}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer ε_{n+1} en fonction de ε_n.
2. En déduire que $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

Exercice 12 (★★). Comparer asymptotiquement (c'est-à-dire déterminer qui est négligeable devant qui) les suites a, b, c et d définies pour tout entier n par :

$$a_n = n! \qquad b_n = n^n \qquad c_n = (2n)! \qquad d_n = (2n)^n.$$

Exercice 13 (★). Déterminer le comportement lorsque $n \to +\infty$ de :

1. $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ 2. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ 3. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 4. $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ 5. $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Exercice 14 (★★). Étudier les limites des fonctions suivantes (les équivalents et négligeabilités peuvent être nécessaires ou ne pas l'être) :

1. Limites en 1^+ et $+\infty$ de $a(x) = \ln\left(\sqrt{x}-1\right) - \ln(x-1)$,
2. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $b(x) = x2^x$,
3. Limite en 8 de $d(x) = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$,
4. Limites en 0^+ et $+\infty$ de $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Exercice 15 (Type DS)**.**
On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \frac{1}{e^t+e^{-t}}$.

1. (a) Réaliser une étude complète de h : parité, variations, limites, extremums et allure du graphe.
   (b) Déterminer un équivalent simple de $h(t)$ quand $t \to +\infty$ et quand $t \to -\infty$.
2. (a) Montrer que h admet un unique point fixe ℓ.
   (b) En utilisant l'étude de fonction réalisée en question 1, justifier que $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|h'(t)| \leqslant h(t) \leqslant \frac{1}{2}$.
4. On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Montrer que u est bien définie et à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite u ?
   (d) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = u_n - \ell$. Montrer que $\varepsilon_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} h'(\ell)\varepsilon_n$. Interpréter ce résultat.
   Indication : on admet que si h est dérivable en un point ℓ, alors $h(t) \underset{t\to\ell}{=} h(\ell) + h'(\ell)(t-\ell) + o(t-\ell)$.