

Relations asymptotiques

Exercice 1 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

- | | | | |
|--|--|---|--|
| 1. $n + 2$ | 2. $\frac{1}{n} + 2$ | 3. $3e^{2n} + 2n^4$ | 4. $e^{\frac{1}{n}} (\cos(\frac{1}{n^2}) - 1)$ |
| 5. $\frac{1}{2n^2} - \frac{3}{n} + e^{-n}$ | 6. $(n+2)e^{n+3}$ | 7. $(n^2 + n + 1) \ln(n)$ | 8. $\frac{3}{5n^2+1}$ |
| 9. $(2n - \ln(n))^3$ | 10. $\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)}$ | 11. $\sqrt{4 - \frac{4}{n}} - 2$ | 12. $(\frac{n+e^n}{1+e^{2n}})^2$ |
| 13. $\sqrt{\frac{2}{n^4} + \frac{2}{n^2}}$ | 14. $\frac{n \ln(n^2+n)+2n}{(n+1)^2 \ln(n^5+1)}$ | 15. $\frac{(1+n)^2}{\cos(\frac{1}{n})} (e^{\frac{1}{n}} - 1)$ | 16. $\ln(1+n) - \ln(n)$ |

Résultat attendu : On conjecture puis montre les équivalents en revenant à la définition :

- | | | | |
|--------------------------|--|--------------------|----------------------|
| 1. n | 2. 2 | 3. $3e^{2n}$ | 4. $-\frac{1}{2n^4}$ |
| 5. $-\frac{3}{n}$ | 6. ne^{n+3} | 7. $n^2 \ln(n)$ | 8. $\frac{3}{5n^2}$ |
| 9. $8n^3$ | 10. $\frac{\ln(n^2)}{\ln(n)} = 2$ | 11. $-\frac{1}{n}$ | 12. e^{-2n} |
| 13. $\frac{\sqrt{2}}{n}$ | 14. $\frac{n \ln(n^2)}{n^2 \ln(n^5)} = \frac{2}{5n}$ | 15. n | 16. $\frac{1}{n}$ |

Exercice 2 (★). Déterminer un équivalent simple lorsque $x \rightarrow +\infty$ puis lorsque $x \rightarrow 0$ (ou parfois 0^+) de :

- | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 1. $2 + 3x$ | 2. $2x^2 - 5x + 7$ | 3. $x^4 - 2 + \frac{4}{x}$ | 4. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$ |
| 5. $\frac{x^3+1}{\ln(1+x^2)}$ | 6. $5 \ln(x) + 2$ | 7. $5 \ln(x) + 2x$ | 8. $5 \ln(x) + \frac{2}{x}$ |
| 9. $\frac{1}{2x+3}$ | 10. $3e^x + x - 1$ | 11. $\frac{x-3x^3}{2x^2+x^4}$ | 12. $\frac{3x^2}{x^2+x^3}$ |
| 13. $\frac{2e^x+x^2+3}{e^{2x}+x^3}$ | 14. $\frac{x^2 \ln(2+x+e^x)}{x+x^2}$ | 15. $\frac{1}{3x-2}$ | 16. $(\ln(2x+4x^4))^2$ |
| 17. $\ln(1+2x+3x^2)$ | | | |

Résultat attendu : On conjecture puis montre les équivalents en revenant à la définition, d'abord en $+\infty$:

- | | | | |
|---------------------------|---------------|--------------------|--------------------|
| 1. $3x$ | 2. $2x^2$ | 3. x^4 | 4. $\frac{2}{x}$ |
| 5. $\frac{x^3}{2 \ln(x)}$ | 6. $5 \ln(x)$ | 7. $2x$ | 8. $5 \ln(x)$ |
| 9. $\frac{1}{2x}$ | 10. $3e^x$ | 11. $-\frac{3}{x}$ | 12. $\frac{3}{x}$ |
| 13. $2e^{-x}$ | 14. x | 15. $\frac{1}{3x}$ | 16. $16(\ln(x))^2$ |
| 17. $2 \ln(x)$ | | | |

Puis en 0 :

- | | | | |
|--------------------|----------------|--------------------|---------------------|
| 1. 2 | 2. 7 | 3. $\frac{4}{x}$ | 4. $-\frac{3}{x^2}$ |
| 5. $\frac{1}{x^2}$ | 6. $5 \ln(x)$ | 7. $5 \ln(x)$ | 8. $\frac{2}{x}$ |
| 9. $\frac{1}{3}$ | 10. 2 | 11. $\frac{1}{2x}$ | 12. 3 |
| 13. 5 | 14. $x \ln(3)$ | 15. $-\frac{1}{2}$ | 16. $(\ln(x))^2$ |
| 17. $2x$ | | | |

Exercice 3 (★★). Trouver un équivalent simple de $\ln(1 - \sin(\frac{1}{n}))$.

Résultat attendu : Les équivalents usuels donnent $\ln(1 - \sin(\frac{1}{n})) \sim -\frac{1}{n}$

Exercice 4 (★★). Soit u une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ qui vérifie $\ln(\frac{2}{u_n}) \sim \frac{1}{n^2}$. Montrer que u converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $(u_n - \ell)$.

Résultat attendu : u converge vers 2 et $u_n - 2 \sim -\frac{2}{n^2}$.

Exercice 5 (★★). Soient u et v deux suites à valeurs strictement positives telles que $u_n \sim v_n$ et qui vérifient $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$.

1. Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
2. Montrer qu'on n'a pas forcément $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
3. Application : déterminer un équivalent de $\frac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln(n)}$ et de $\frac{n^2+1}{\ln(e^n+n)}$.

Résultat attendu :

1. Retour à la définition
2. Contre exemple.
3. $\frac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln(n)} \sim 2$ et $\frac{n^2+1}{\ln(e^n+n)} \sim n$.

Exercice 6 (★). Simplifier au maximum les expressions suivantes, en restant le plus précis possible.

1. $n^2O(n^3)$
2. $\frac{1}{n^2}o(n)$
3. $o(n^2) \times o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
4. $o(e^{-n}) \times O(n)$
5. $O(\ln(n)) \times O\left(\frac{1}{n^3}\right)$
6. $\left(\frac{3}{\ln(n)}\right) o(n^2) \times o(e^{-n})$
7. $2o(\sqrt{n}) + o(\sqrt{n})$
8. $O\left(\frac{1}{n}\right) - O\left(\frac{1}{n}\right)$
9. $o(e^{-n}) - 2O(e^{-n})$
10. $\frac{1}{n}(o(\ln(n)) - o(\ln(n)))$
11. $e^n + O(e^n)$
12. $o(n^2) + o(n^3)$
13. $o(e^{-n}) + o(e^{-2n})$
14. $\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
15. $n + o(n \ln(n)) + o(\ln(n))$

Résultat attendu :

1. $O(n^5)$
2. $o\left(\frac{1}{n}\right)$
3. $o\left(\frac{1}{n}\right)$
4. $o(ne^{-n})$
5. $O\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)$
6. $o\left(\frac{n^2 e^{-n}}{\ln(n)}\right)$
7. $o(\sqrt{n})$
8. $O\left(\frac{1}{n}\right)$
9. $O(e^{-n})$
10. $o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
11. $O(e^n)$
12. $o(n^3)$
13. $o(e^{-n})$
14. $o\left(\frac{1}{n}\right)$
15. $o(n \ln(n))$

Exercice 7 (★).

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes (les O et o sont en $x \rightarrow +\infty$), en restant le plus précis possible.
 - (a) $o(x+1)$
 - (b) $o(5x^2) - o(2x^3)$
 - (c) $O(x) - O(x^2)$
 - (d) $\ln(x)(o(x) + o(x^2))$
 - (e) $O(2+x - 3x^4)$
 - (f) $o\left(\frac{1}{x}\right) + o(1)$
 - (g) $o\left(x^2 - 2 - \frac{1}{x^3}\right)$
 - (h) $o\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$
 - (i) $o\left(\frac{1}{x+2}\right)$
2. Réaliser le même travail avec cette fois-ci les O et o en $x \rightarrow 0$ (0^+ lorsqu'on utilise un logarithme).

Résultat attendu :

1. (a) $o(x)$
- (b) $o(x^3)$
- (c) $O(x^2)$
- (d) $o(x^2 \ln(x))$
- (e) $O(x^4)$
- (f) $o(1)$
- (g) $o(x^2)$
- (h) $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- (i) $o\left(\frac{1}{x}\right)$
2. (a) $o(1)$
- (b) $o(x^2)$
- (c) $O(x)$
- (d) $o(x \ln(x))$
- (e) $O(1)$
- (f) $o\left(\frac{1}{x}\right)$
- (g) $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$
- (h) $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$
- (i) $o(1)$

Exercice 8 (★). Vrai ou faux ? Justifier.

- | | | |
|--|--|-------------------------------|
| 1. $n^2 = o(e^n)$ | 2. $\sqrt{n} = o(n)$ | 3. $n^5 = o(e^n)$ |
| 4. $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ | 5. $\frac{1}{\ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ | 6. $5n^4 - 3n^2 - 1 = O(n^4)$ |
| 7. $o(n^2) = o(n^3)$ | 8. $o(n^3) = o(n^2)$ | |

Résultat attendu :

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 1. Vrai | 2. Vrai | 3. Vrai |
| 4. Vrai | 5. Faux | 6. Vrai |
| 7. Vrai | 8. Faux | |

Exercice 9 (★). Simplifier au maximum (et sans perdre de précision) les expressions suivantes (les O et o sont en $x \rightarrow 0$) :

- | | | |
|---|--|--------------------------------|
| 1. $1 + 2x - x^2 + o(x)$ | 2. $5x^5 - 3x^2 + o(x^3)$ | 3. $-2 + x^2 - x^3 + o(x + 1)$ |
| 4. $1 + \frac{1}{x} - x^2 + o(x - x^2)$ | 5. $\frac{1}{x^2} + 1 - x + o\left(\frac{1}{x}\right)$ | |

Résultat attendu :

- | | | |
|-----------------------------|--|----------------|
| 1. $1 + 2x + o(x)$ | 2. $-3x^2 + o(x^3)$ | 3. $-2 + o(1)$ |
| 4. $1 + \frac{1}{x} + o(x)$ | 5. $\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ | |

Exercice 10 (★★). Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $b > 0$. On considère la suite u qui vérifie $u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Est-elle monotone à partir d'un certain rang ?

Résultat attendu : La suite u est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 11 (★★). Soit $q > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n = \frac{q^n}{n!}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer ε_{n+1} en fonction de ε_n .
2. En déduire que $q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!)$

Résultat attendu :

1. $\varepsilon_{n+1} = \frac{q}{n+1} \varepsilon_n$
2. On montre que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0), puis on passe à la limite dans l'égalité de la question précédente pour montrer que sa limite vaut 0.

Exercice 12 (★★). Comparer asymptotiquement (c'est-à-dire déterminer qui est négligeable devant qui) les suites a , b , c et d définies pour tout entier n par :

$$a_n = n! \quad b_n = n^n \quad c_n = (2n)! \quad d_n = (2n)^n.$$

Résultat attendu : $n! = o(n^n)$ puis $n^n = o((2n)^n)$ puis $(2n)^n = o((2n)!)$.

Exercice 13 (★). Déterminer le comportement lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

- | | | | | |
|---------------------------------------|--|-------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1. $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ | 2. $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ | 3. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ | 4. $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ | 5. $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ |
|---------------------------------------|--|-------------------------------------|---------------------------------------|--|

Résultat attendu : Les limites valent :

- | | | | | |
|--------------|--------------|-------------|--------------|------|
| 1. $e^0 = 1$ | 2. $+\infty$ | 3. e^{-1} | 4. $e^0 = 1$ | 5. 0 |
|--------------|--------------|-------------|--------------|------|

Exercice 14 (★★). Étudier les limites des fonctions suivantes (les équivalents et négligeabilités peuvent être nécessaires ou ne pas l'être) :

1. Limites en 1^+ et $+\infty$ de $a(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1)$,
2. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $b(x) = x2^x$,
3. Limite en 8 de $d(x) = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x-2}}$,
4. Limites en 0^+ et $+\infty$ de $f(x) = x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Résultat attendu :

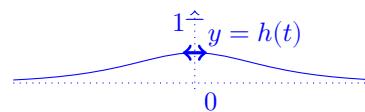
1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} a(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow 8} d(x) = 12$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

Exercice 15 (Type DS).

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \frac{1}{e^t + e^{-t}}$.

1. (a) Réaliser une étude complète de h : parité, variations, limites, extremums et allure du graphe.
 (b) Déterminer un équivalent simple de $h(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$ et quand $t \rightarrow -\infty$.
2. (a) Montrer que h admet un unique point fixe ℓ .
 (b) En utilisant l'étude de fonction réalisée en question 1, justifier que $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|h'(t)| \leq h(t) \leq \frac{1}{2}$.
4. On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.
 - (a) Montrer que u est bien définie et à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$.
 - (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.
 - (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite u ?
 - (d) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = u_n - \ell$. Montrer que $\varepsilon_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} h'(\ell)\varepsilon_n$. Interpréter ce résultat.
Indication : on admet que si h est dérivable en un point ℓ , alors $h(t) \underset{t \rightarrow \ell}{=} h(\ell) + h'(\ell)(t - \ell) + o(t - \ell)$.

Résultat attendu :

1. (a) h est paire car $\forall t \in \mathbb{R}, h(-t) = \frac{1}{e^{-t} + e^t} = h(t)$. De plus, h est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, h'(t) = \frac{e^{-t} - e^t}{(e^t + e^{-t})^2}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $h'(t) \geq 0 \iff e^t \leq e^{-t} \iff t \leq -t \iff t \leq 0$. Donc h est croissante sur \mathbb{R}_- et décroissante sur \mathbb{R}_+ . Elle admet un maximum en 0, qui vaut $h(0) = \frac{1}{2}$. Enfin, $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = 0$.
 
1. (b) $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{e^t + e^{-t}}{e^t} = 1 + e^{-2t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $e^t + e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^t$ et $h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e^t} = e^{-t}$.
 $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{e^t + e^{-t}}{e^{-t}} = e^{2t} + 1 \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $e^t + e^{-t} \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} e^{-t}$ et $h(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{e^{-t}} = e^t$.
2. (a) Soit $t < 0$, alors $h(t) > 0$ d'après 1.a. Donc $h(t) \neq t$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(t) = h(t) - t$. Elle est dérivable sur \mathbb{R}_+ et 1.a donne $\forall t \in \mathbb{R}_+, g'(t) = h'(t) - 1 \leq -1 < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ . Comme elle est aussi continue, on peut appliquer le théorème de la bijection : g réalise une bijection de \mathbb{R}_+ dans $g(\mathbb{R}_+)$. Or $g(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty$, donc $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, \frac{1}{2}]$. Comme $0 \in]-\infty, \frac{1}{2}]$, $\exists! \ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(\ell) = 0 \iff h(\ell) = \ell$. Donc h admet un unique point fixe.
 (b) On a vu en question 1.a que h est bornée par 0 et $\frac{1}{2}$, donc $0 \leq h(\ell) \leq \frac{1}{2}$, ce qui donne $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$, $|h'(t)| = \left| \frac{e^{-t} - e^t}{(e^t + e^{-t})^2} \right| = \frac{|e^{-t} - e^t|}{(e^t + e^{-t})^2} \leq \frac{|e^{-t}| + |e^t|}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{e^{-t} + e^t}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{1}{e^t + e^{-t}} = h(t)$ par propriétés de la valeur absolue. L'étude de h effectuée en 1.a garantit par ailleurs que $h(t) \leq \frac{1}{2}$, ce qui permet de conclure.
4. (a) D'après 1.a, h est minorée par 0 et majorée par $\frac{1}{2}$. Donc l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par h . Or, $u_0 = 0 \in [0, \frac{1}{2}]$. Donc u est bien définie et à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$.
 (b) h est dérivable sur \mathbb{R} . De plus, d'après 3., $|h'|$ est majorée par $\frac{1}{2}$. L'inégalité des accroissements finis donne alors que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$. Soit $n \in \mathbb{N}$, prendre $x = u_n$ et $y = \ell$ donne $|h(u_n) - h(\ell)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$, càd $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$.
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \langle |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \rangle$. On a $|u_0 - \ell| = |0 - \ell| = \ell \leq \frac{1}{2}$ donc $P(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ vraie. 4b. donne $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc $\forall n \in \mathbb{N} |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \rightarrow 0$. Donc u converge vers ℓ (par encadrement).
 (d) $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Pour avoir $|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$, il suffit donc de vérifier $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}$. Or $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3} \iff 2^{n+1} \geq 10^3 \iff \ln(2^{n+1}) \geq \ln(10^3) \iff (n+1) \ln(2) \geq 3 \ln(10) \iff n \geq \frac{3 \ln(10)}{\ln(2)} - 1$, où on a utilisé la stricte croissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* et $\ln(2) > 0$. Donc $n_0 = \left\lfloor \frac{3 \ln(10)}{\ln(2)} \right\rfloor$ convient.
5. D'après l'indication, $h(t) \underset{t \rightarrow \ell}{=} \ell + h'(\ell)(t - \ell) + o(t - \ell)$ car $h(\ell) = \ell$. Or $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - \ell = h(u_n) - \ell$. Comme u converge vers ℓ , $h(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell + h'(\ell)(u_n - \ell) + o(u_n - \ell)$. Donc $\varepsilon_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} h'(\ell)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$, donc $\varepsilon_{n+1} \sim h'(\ell)\varepsilon_n$. Interprétation : ε_n représente la précision de l'approximation de ℓ par u_n . Cette précision s'améliore d'un facteur $h'(\ell)$ à chaque nouveau terme de la suite.