Exercices PCSI
É.Bouchet

Dénombrement

Exercice 1 (★). On considère le mot « ABRACADABRANTESQUE ». Combien possède-t-il d'anagrammes ?
Résultat attendu : Il y a $\frac{18!}{2!2!2!5!}$ anagrammes.

Exercice 2 (★). Combien y a-t-il de nombres à 5 chiffres qui ne contiennent pas le chiffre 9 ?
Résultat attendu : Il y a $8 \times 9^4 = 52\,488$ choix possibles.

Exercice 3 (★). Montrer que dans un village de 700 habitants, au moins 2 personnes ont les mêmes initiales.
Résultat attendu : Il y a $26^2 = 676$ initiales possibles, on conclut avec le principe des tiroirs.

Exercice 4 (★). Dans une finale du 100 mètres à 8 coureurs, combien y a-t-il de podiums possibles ?
Résultat attendu : Il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

Exercice 5 (★). Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. Soit $p \in [\![1, n]\!]$, on tire simultanément p boules dans l'urne.

1. Dénombrer le nombre de tirages possibles.
2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Dénombrer le nombre de tirages possibles dont le minimum des numéros tirés est k.
3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \leqslant j$. Dénombrer le nombre de tirages possibles où toutes les boules tirées ont un numéro compris entre i et j.
4. Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k < l$. Dénombrer le nombre de tirages possibles dont le minimum des numéros tirés est k, et le maximum est l.
5. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Dénombrer le nombre de tirages possibles où la boule i est tirée.
6. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Dénombrer le nombre de tirages possibles où la boule i n'est pas tirée.

Résultat attendu : Le nombre de possibilités vaut :

1. $\binom{n}{p}$
2. $\binom{n-k}{p-1}$
3. $\binom{j-i+1}{p}$
4. $\binom{l-k-1}{p-2}$
5. $\binom{n-1}{p-1}$
6. $\binom{n-1}{p}$

Exercice 6 (★).
Soient $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$ deux entiers naturels tels que $n \geqslant p$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue p tirages avec remise.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages où les numéros des boules tirées sont tous distincts ?
3. Quel est le nombre de tirages où au moins deux des boules tirées portent le même numéro ?
4. (★★) Quel est le nombre de tirages où exactement deux des boules tirées portent le même numéro ?

Résultat attendu :

1. n^p tirages
2. $\frac{n!}{(n-p)!}$ tirages
3. $n^p - \frac{n!}{(n-p)!}$ tirages
4. $n\binom{n-1}{p-2}\frac{p!}{2}$ tirages

Exercice 7 (★). Un facteur arrive dans le hall d'un immeuble. Il doit distribuer 7 prospectus dans 10 boites aux lettres nominatives. De combien de façons peut-il faire dans chacun des cas suivants :

1. Chaque boite peut contenir au plus un prospectus et les prospectus sont distincts.
2. Chaque boite peut contenir au plus un prospectus et les prospectus sont identiques.
3. Chaque boite peut contenir un nombre quelconque de prospectus et les prospectus sont distincts.
4. (★★★) Chaque boite peut contenir un nombre quelconque de prospectus et les prospectus sont identiques.

Résultat attendu :

1. 604 800 possibilités.
2. 120 possibilités.
3. 10^7 possibilités.
4. 11 440 possibilités.

Exercice 8 (★★). Pour réaliser un caractère en braille, on utilise 6 points placés en rectangle (2 de large, 3 de haut), et on perce au minimum un des 6 points. Combien de caractères possibles ce codage permet-il d'inventer ?
Résultat attendu : Il y a 63 possibilités.

Exercice 9 (★★). Sur une étagère, on range au hasard les n tomes d'une encyclopédie.

1. Combien y a-t-il de manières différentes de les ranger ?
2. Parmi ces rangements, combien permettent de retrouver les tomes 1 et 2 côte à côte et dans cet ordre ?

Résultat attendu :

1. Il y a $n!$ rangements possibles.
2. $(n-1)!$ rangements satisfont ces conditions.

Exercice 10 (★★). On considère un jeu de 32 cartes (il y a donc 8 cartes de chaque « couleur »).

1. De combien de façons peut-on tirer une main de 8 cartes ?
2. Combien de ces mains contiendront exactement 4 cœurs ?
3. Combien de ces mains contiendront exactement 3 valets ?
4. Combien de ces mains contiendront exactement 4 cœurs et 3 valets ?
5. Combien de ces mains contiendront exactement 4 cœurs ou exactement 3 valets ?
6. Combien de ces mains contiendront au moins un cœur ?

Résultat attendu :

1. 10 518 300 possibilités
2. 743 820 possibilités
3. 393 120 possibilités
4. 22 785 possibilités
5. 1 114 155 possibilités
6. 9 782 829 possibilités

Exercice 11 (★★). On dispose de 4 pions numérotés de 1 à 4 et de 3 sacs numérotés de 1 à 3. On peut mettre plusieurs pions dans un sac.

1. Combien y-a-t-il de façons de placer les 4 jetons dans les 3 sacs ?
2. Soit $i \in [\![1,3]\!]$, on appelle V_i l'ensemble des résultats qui amènent le sac i vide. Calculer $\mathrm{Card}(V_i)$.
3. En déduire le nombre de façons de laisser au moins un sac vide.
4. Combien y-a-t-il de façons de ne laisser aucun sac vide ?

Résultat attendu :

1. 81 possibilités
2. 16 possibilités
3. 45 possibilités
4. 36 possibilités

Exercice 12 (★★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse aux listes d'entiers naturels non nuls dont la somme des termes fait n. On note u_n le nombre de ces listes.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4. Que peut-on conjecturer pour u_n ?
2. Démontrer cette conjecture.

Résultat attendu : On conjecture $u_n = 2^{n-1}$, que l'on montre ensuite par récurrence forte.

Exercice 13 (★★★). Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $p \in [\![0, a+b]\!]$. Montrer que $\displaystyle\binom{a+b}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$.

Résultat attendu : On dénombre de deux manières différentes le nombre de parties à p éléments d'un ensemble (bien choisi) à $a+b$ éléments.

Exercice 14 (Type DS)**.** On monte un escalier en franchissant à chaque pas, soit une marche, soit deux marches.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p_n le nombre de façons dont on peut enchaîner les pas d'une marche et les pas de deux marches pour gravir un escalier de n marches.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence liant p_{n+2}, p_{n+1} et p_n.
   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle k le nombre de pas de deux marches que l'on peut faire pour gravir un escalier de n marches.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles pour k ?
   (b) Calculer en fonction de k le nombre total de pas nécessaires.
   (c) Déterminer le nombre de façons dont on peut opérer en faisant k pas de deux marches.
   (d) En déduire une expression de p_n sous forme d'une somme.

Résultat attendu :

1. (a) S'il faut gravir $n+2$ marches, on peut procéder de deux façons différentes :
   - commencer par un pas d'une marche, puis gravir les $n+1$ marches suivantes : p_{n+1} possibilités.
   - commencer par un pas de deux marche, puis gravir les n marches suivantes : p_n possibilités.

   Ces deux cas étant disjoints, on trouve $p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$.

   (b) On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre deux, d'équation caractéristique $x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$. Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, ce qui correspond aux racines $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   Or $p_1 = 1$ (il existe une unique façon de monter un escalier d'une seule marche) et $p_2 = 2$ (un escalier de deux marches peut se monter soit en une fois, soit marche après marche). Ces conditions initiales donnent $1 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $2 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$. Cette deuxième égalité moins $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ fois la première donne $2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b$, donc $b = \frac{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+1} = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$. On en déduit que $a = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.
   Donc $\forall n \geqslant 1$, $p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.
2. (a) Le nombre de marches doit être au moins deux fois supérieur à k, il faut donc $k \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$
   (b) Si on fixe k, on sait que $2k$ marches sont montées par des pas de deux marches. Il reste donc $n - 2k$ marches à gravir (par des pas d'une marche). En sommant le nombre de pas de deux marches (k) et le nombre de pas de une marche ($n - 2k$), on trouve un total de $n - k$ pas nécessaires.
   (c) Si k est fixé, choisir une façon de monter l'escalier revient à choisir les positions des k pas de deux marches. Or il y a $n - k$ pas au total. Il y a donc $\binom{n-k}{k}$ possibilités.
   (d) Les questions précédentes dénombrent des cas disjoints (car k ne peut pas prendre deux valeurs différentes). On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$.