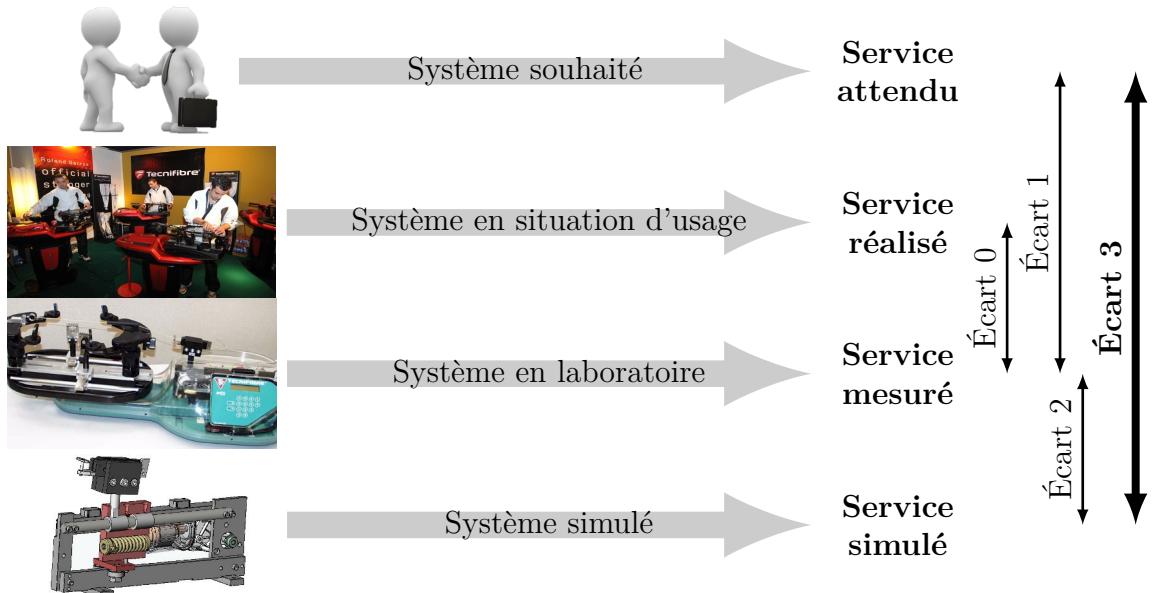


Analyse harmonique des SLCI

— *Éléments de correction des TDs* —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Exercices

Exercice 1 – Tracés de réponses harmoniques dans le plan de Bode 3



Nicolas Mesnier, lycée international Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI
<https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin>
— Version du 3 février 2026 —

— EXERCICE 1 —

Tracés de réponses harmoniques dans le plan de Bode

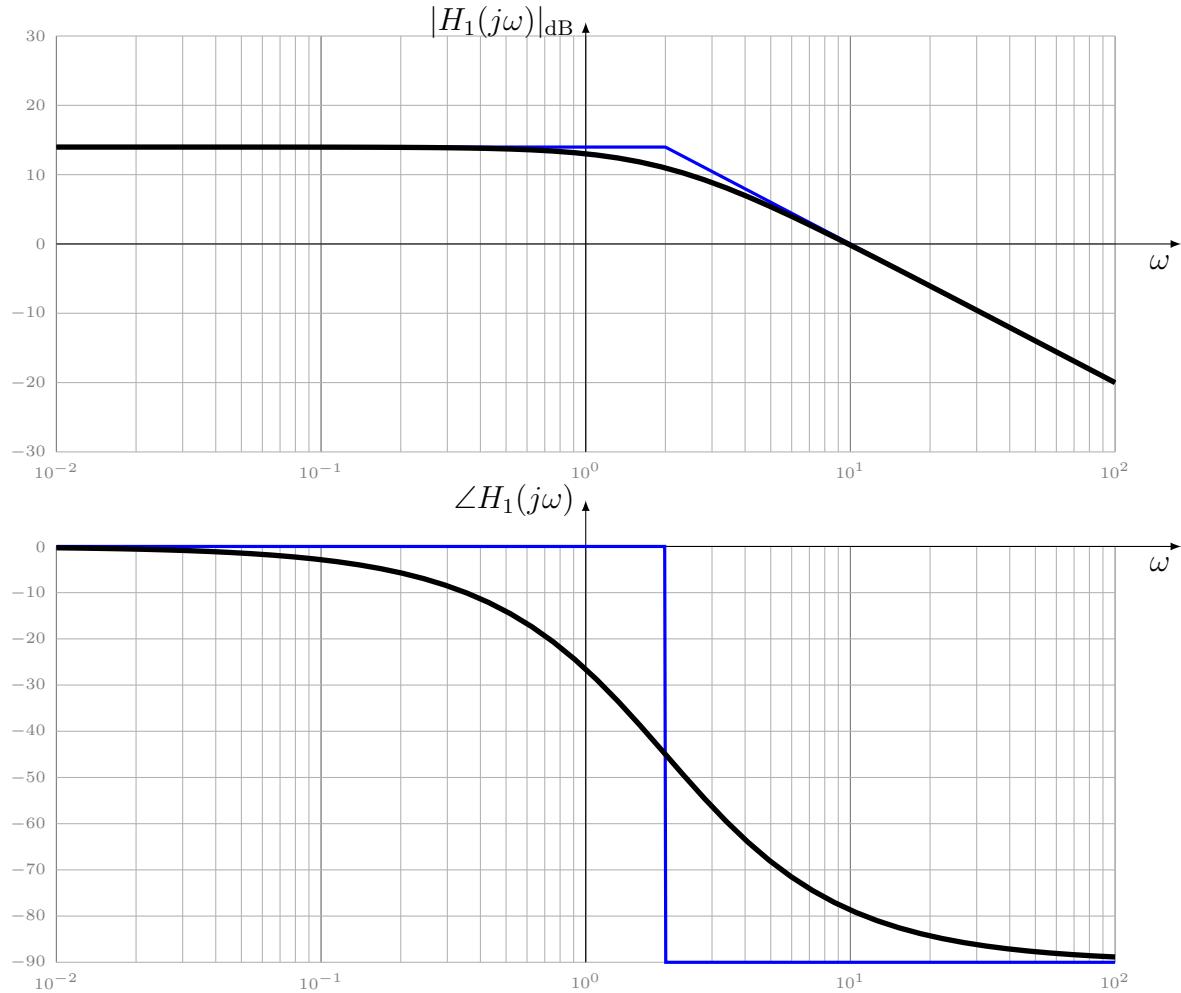
Question 1.1. En faisant attention de bien mettre la fonction de transfert sous forme canonique

$$H_1(p) = \frac{10}{2+p} = \frac{5}{1+\frac{p}{2}}$$

il vient

$$K = 5 \implies 20 \log(K) = 20 \log(10) - 20 \log(2) = 14 \text{ dB}$$

et une pulsation de cassure $\omega_k = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

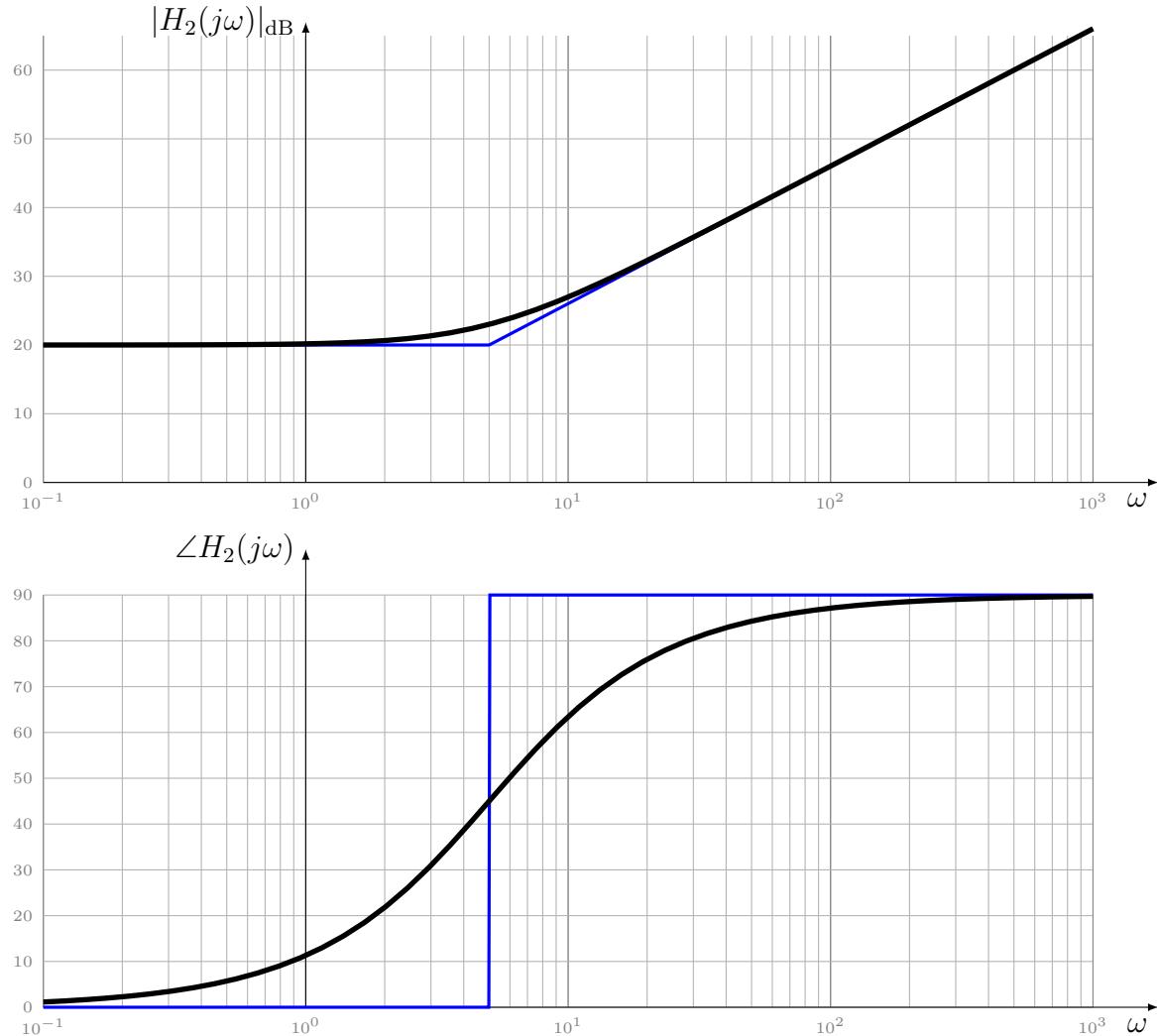


$$H_2(p) = 10(1 + 0,2p) = 10 \left(1 + \frac{p}{5}\right)$$

il vient

$$K = 10 \implies 20 \log(K) = 20 \text{ dB}$$

et une pulsation de cassure $\omega_k = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

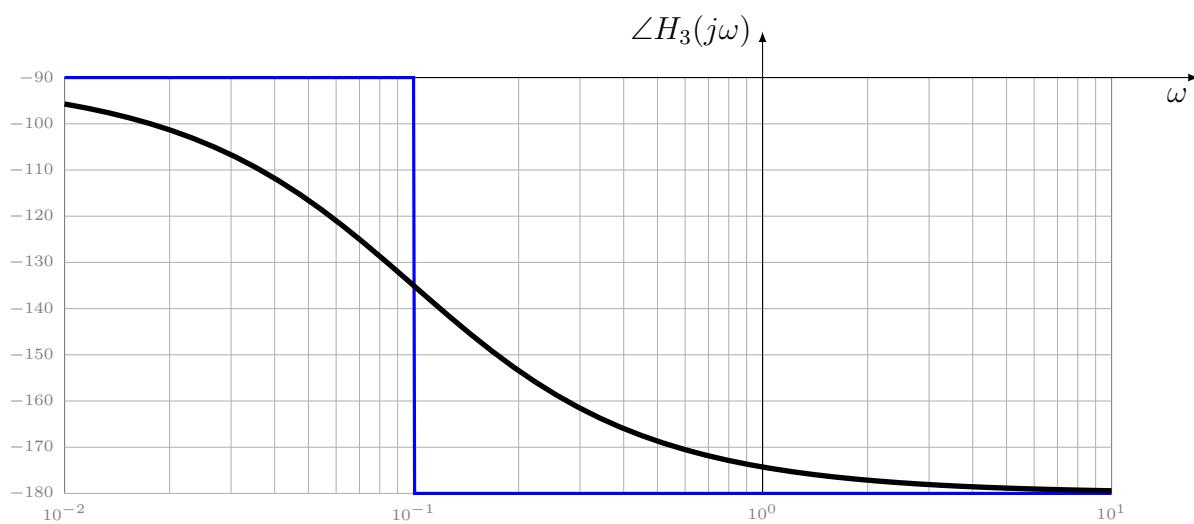
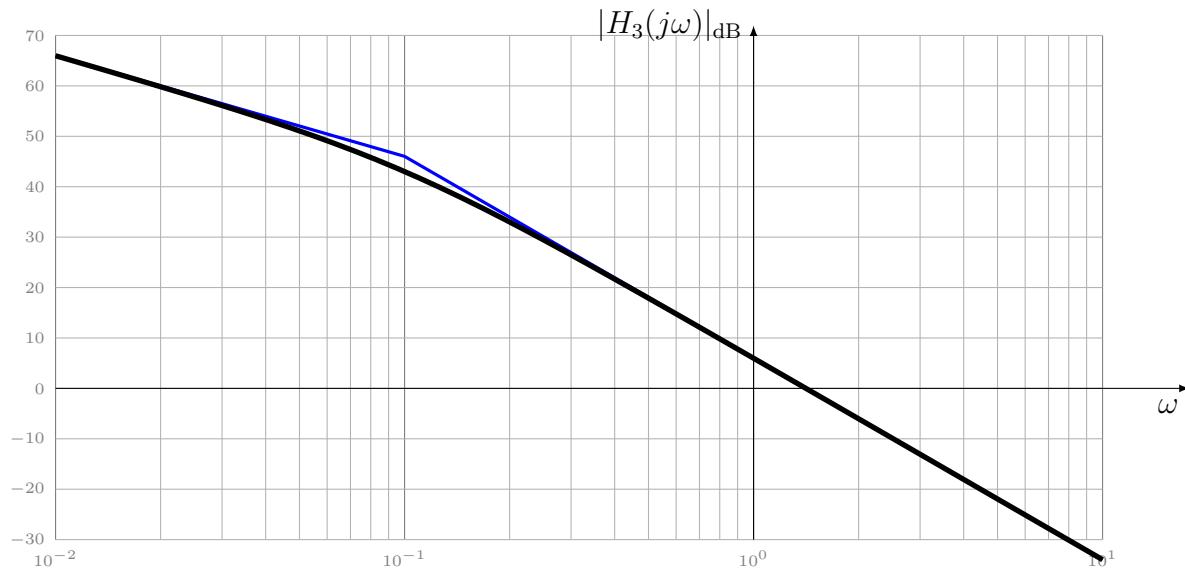


$$H_3(p) = \frac{20}{p(1 + 10p)}$$

il vient que la fonction de transfert est le produit d'un premier ordre de gain

$$K = 20 \implies 20 \log(K) = 26 \text{ dB}$$

et une pulsation de cassure $\omega_k = 0,1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et d'un intégrateur. Sachant qu'à la pulsation ω_k , l'intégrateur à un gain de 20 dB, il vient par somme que la cassure des asymptotes se fait à 46 dB avec avant une pente à -20 dB/décade et après à -40 dB/décade . À basse fréquence l'argument est celui de l'intégrateur à $-\pi/2$ et après, il tend asymptotiquement vers $-\pi$. Il vaut $-3\pi/4$ en ω_k .

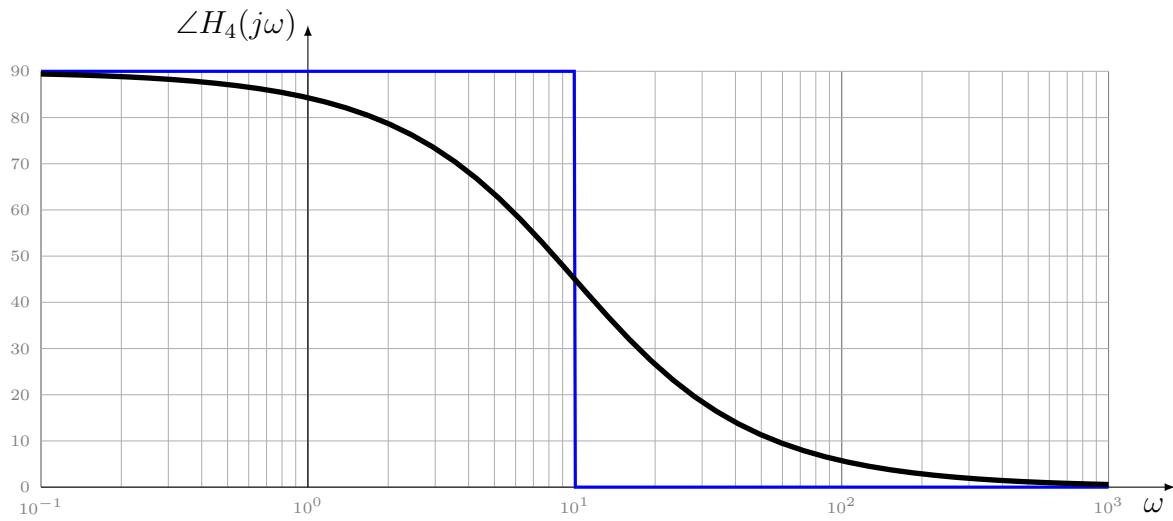
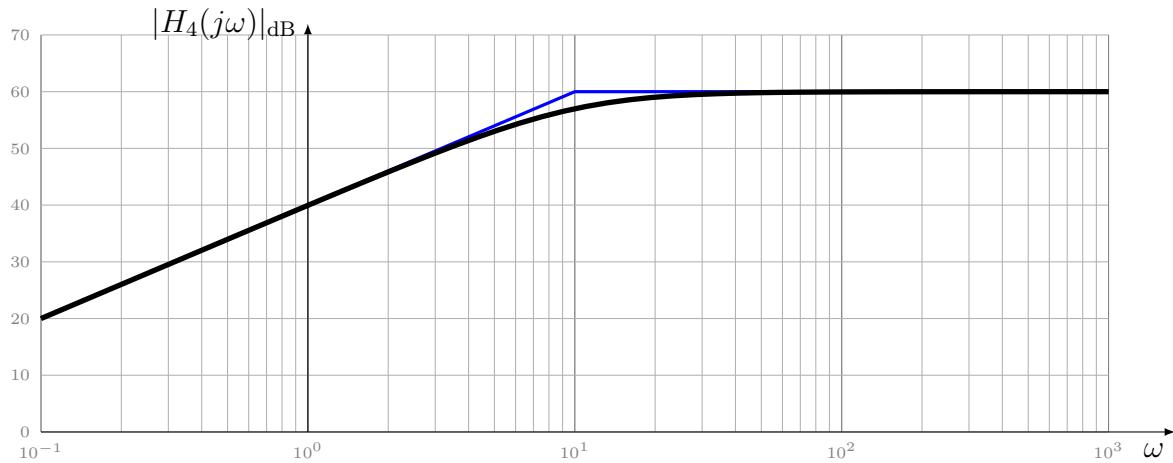


$$H_4(p) = \frac{100 p}{1 + 0,1 p}$$

il vient que la fonction de transfert est le produit d'un premier ordre de gain

$$K = 100 \implies 20 \log(K) = 40 \text{ dB}$$

et une pulsation de cassure $\omega_k = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et d'un déivateur. Sachant qu'à la pulsation ω_k , le déivateur à un gain de 20 dB, il vient par somme que la cassure des asymptotes se fait à 60 dB avec avant une pente à +20 dB/décade et après une pente nulle. À basse fréquence l'argument est celui du déivateur à $+\pi/2$ et après, il tend asymptotiquement vers 0. Il vaut $\pi/4$ en ω_k .



$$H_5(p) = \frac{\left(1 + \frac{p}{3}\right) \left(1 + \frac{p}{6}\right)}{\left(1 + \frac{p}{0,6}\right) \left(1 + \frac{p}{30}\right)}$$

est une fonction de transfert produit de deux numérateurs d'ordre 1, de pulsations de cassures $\omega_2 = 3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\omega_3 = 6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et deux premiers ordre, de pulsations de cassures $\omega_1 = 0,6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\omega_4 = 30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. À basse fréquence, c'est-à-dire pour tout $\omega \ll \omega_1$, la pente du gain est nulle et l'argument à 0° . Ensuite, par somme, on a asymptotiquement :

- $\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$, -20 dB/décade et $-\pi/2$;
- $\forall \omega \in [\omega_2, \omega_3]$, 0 dB/décade et 0 ;
- $\forall \omega \in [\omega_3, \omega_4]$, 20 dB/décade et $+\pi/2$;
- $\forall \omega > \omega_4$, 0 dB/décade et 0 .

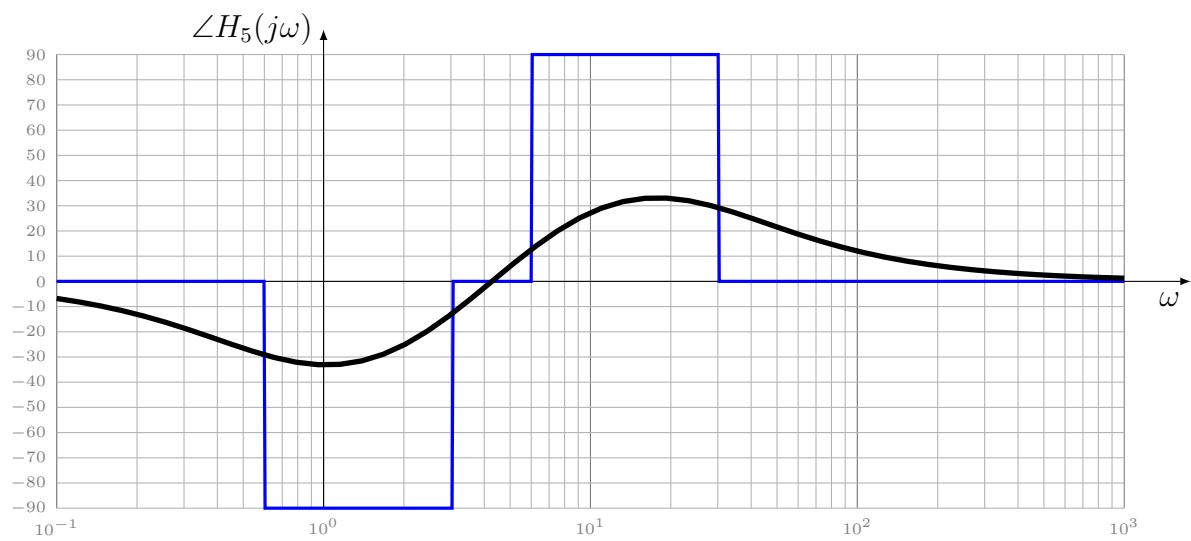
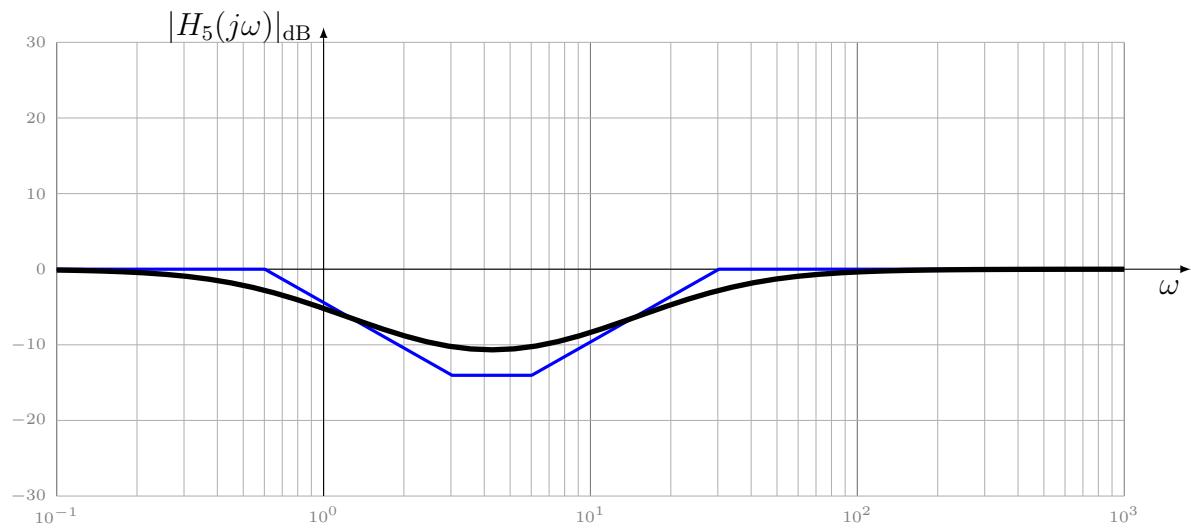
De plus, comme on a

$$\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \log\left(\frac{\omega_4}{\omega_3}\right) = \log(5) \approx \frac{2}{3}$$

on en déduit que le tracé du gain est symétrique par rapport à la pulsation ω_k telle que

$$\log(\omega_k) = \frac{1}{2} (\log \omega_2 + \log \omega_3) = \frac{\log(3) + \log(6)}{2} = \log(\sqrt{18}) \implies \omega_k \approx 4,25 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

et celui de l'argument est antisymétrique et passe donc à 0° en ω_k . Comme $\omega_2/\omega_1 < 10$ et que ω_4/ω_3 alors l'argument n'atteindra pas les asymptotes respectivement en $-\pi/2$ et $+\pi/2$. Enfin, par théorème de Thalès on trouve que l'asymptote horizontale du gain pour $\omega \in [\omega_2, \omega_3]$ vaut $2/3 \times -20 \approx -14 \text{ dB}$ et que celle pour $\omega > \omega_4$ vaut 0 dB .



$$H_6(p) = \frac{30}{1 + 0,1 p + 0,01 p^2}$$

est une fonction de transfert du second ordre du type $\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K = 30 \implies$

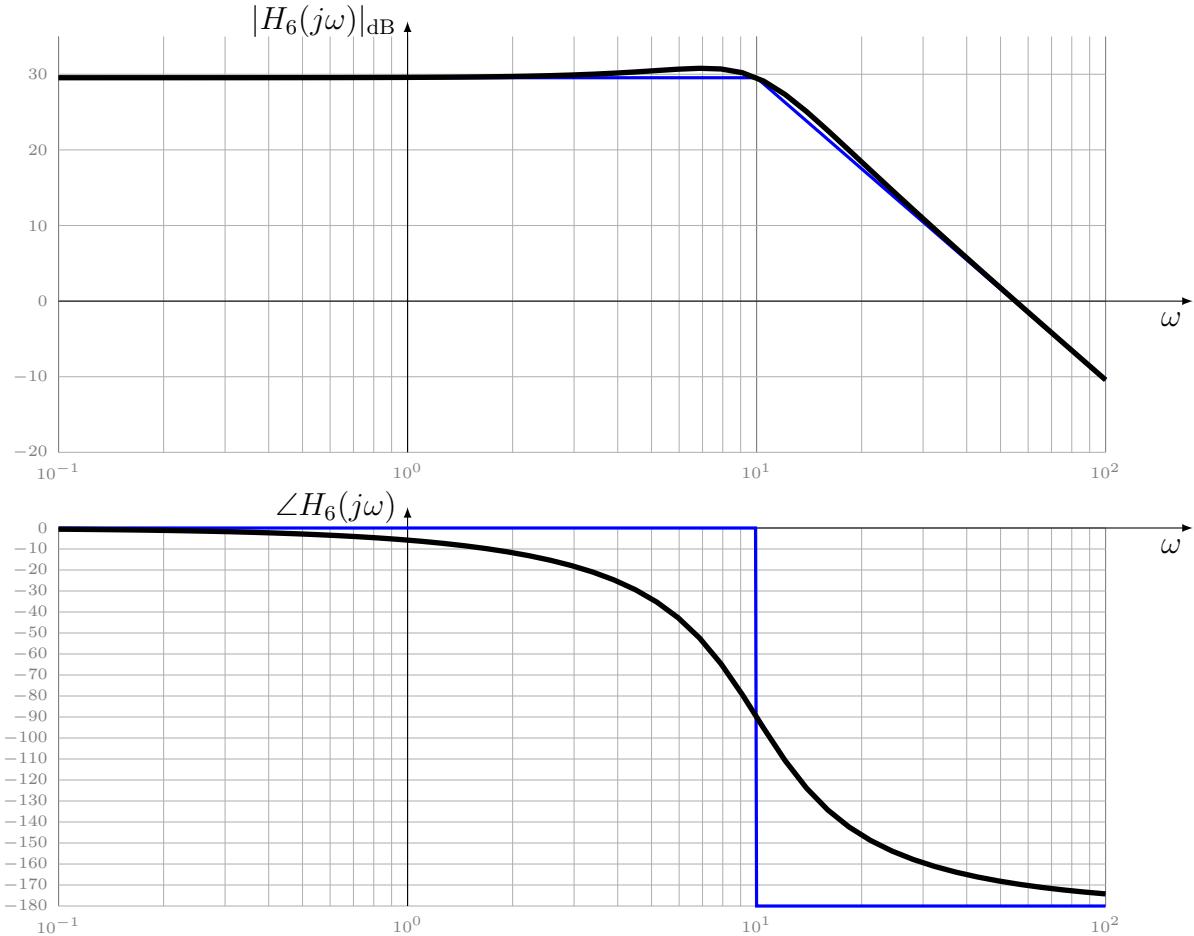
$20 \log(K) = 30 \text{ dB}$, $\omega_0 = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\xi = 0,5 < 1$ donc sous-amorti. Comme de plus $\xi \leq 1/\sqrt{2}$ alors il y aura une résonance à la pulsation

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 10 \sqrt{1 - 2 \frac{1}{4}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \approx 7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

d'amplitude

$$-20 \log \left(2\xi \sqrt{1 - \xi^2} \right) = 20 \log(2) - 10 \log(3) \approx 1,25 \text{ dB}$$

Comme $Q = 1/(2\xi) = 1$, la courbe passe pile au point de cassure à la pulsation de cassure ω_0 .

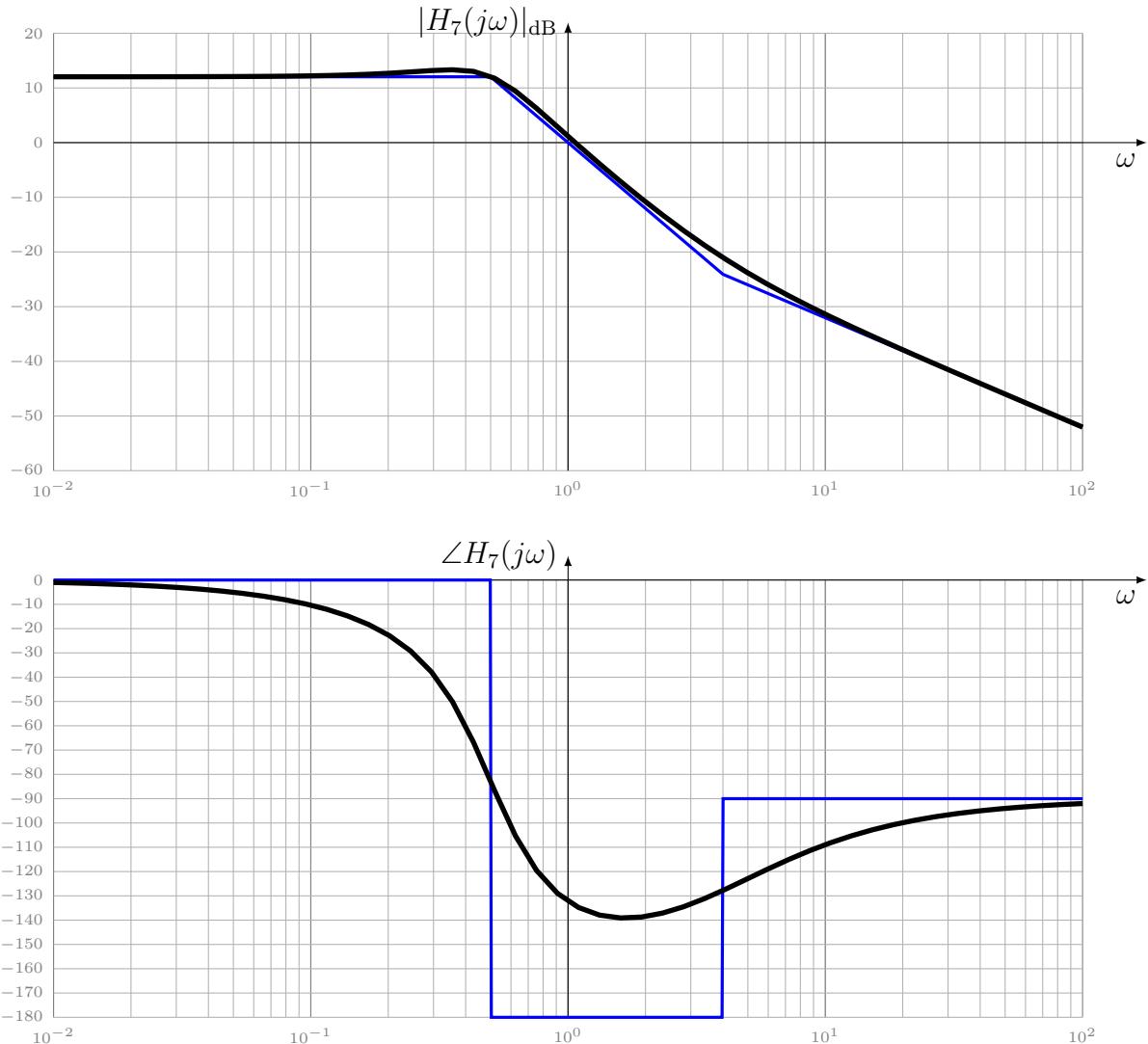


$$H_7(p) = \frac{4 + p}{1 + 2p + 4p^2} = 4 \frac{1 + \frac{p}{4}}{1 + 2p + 4p^2}$$

est une fonction de transfert produit d'un numérateur d'ordre 1 de pulsation de cassure $\omega_1 = 4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et d'un second ordre du type $\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K = 4 \implies 20 \log(K) = 12 \text{ dB}$, $\omega_0 = 0,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\xi = 0,5 < 1$ donc sous-amorti. Comme de plus $\xi \leq 1/\sqrt{2}$ alors il y aura une résonance à la pulsation

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 0,5 \sqrt{1 - 2 \frac{1}{4}} \approx 0,35 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

d'amplitude 1,25 dB. Comme $Q = 1/(2\xi) = 1$, la courbe passe pile au point de cassure à la pulsation de cassure ω_0 . À partir de $\omega_1 > \omega_0$, l'asymptote du gain est de pente -20 dB/décade et l'argument tend asymptotiquement vers $-\pi/2$.



$$H_8(p) = \frac{100}{p(1 + 0,2p + 0,01p^2)} = \frac{100}{p \left(1 + \frac{p}{10}\right)^2}$$

est une fonction de transfert produit d'un intégrateur et d'un second ordre du type $\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K = 100 \implies 20 \log(K) = 40 \text{ dB}$, $\omega_0 = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\xi = 1$ donc en régime critique. Sachant qu'à la pulsation ω_0 , l'intégrateur à un gain de -20 dB , il vient par somme que la cassure des asymptotes se fait à 20 dB avec avant une pente à -20 dB/décade et après à -60 dB/décade . À basse fréquence l'argument est celui de l'intégrateur à $-\pi/2$ et après, il tend asymptotiquement vers $-3\pi/2$. Il vaut $-\pi/2$ en ω_0 .



$$H_9(p) = \frac{30(1+0,1p)}{p(1+p+0,01p^2)}$$

est une fonction de transfert produit d'un intégrateur, d'un numérateur d'ordre 1 de pulsation de cassure $\omega_k = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et d'un second ordre du type $\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec

$K = 30 \implies 20 \log(K) = 3 \text{ dB}$, $\omega_0 = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\xi = 5 \gg 1$ donc en régime sur-amorti. Le second ordre admet donc une factorisation avec 2 pôles réels, associés aux constantes de temps τ_1 et $\tau_2 > \tau_1$ telles que

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2} = \omega_0^2 \implies \frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{1}{\tau_1}\right) + \log\left(\frac{1}{\tau_2}\right) \right) = \log(\omega_0)$$

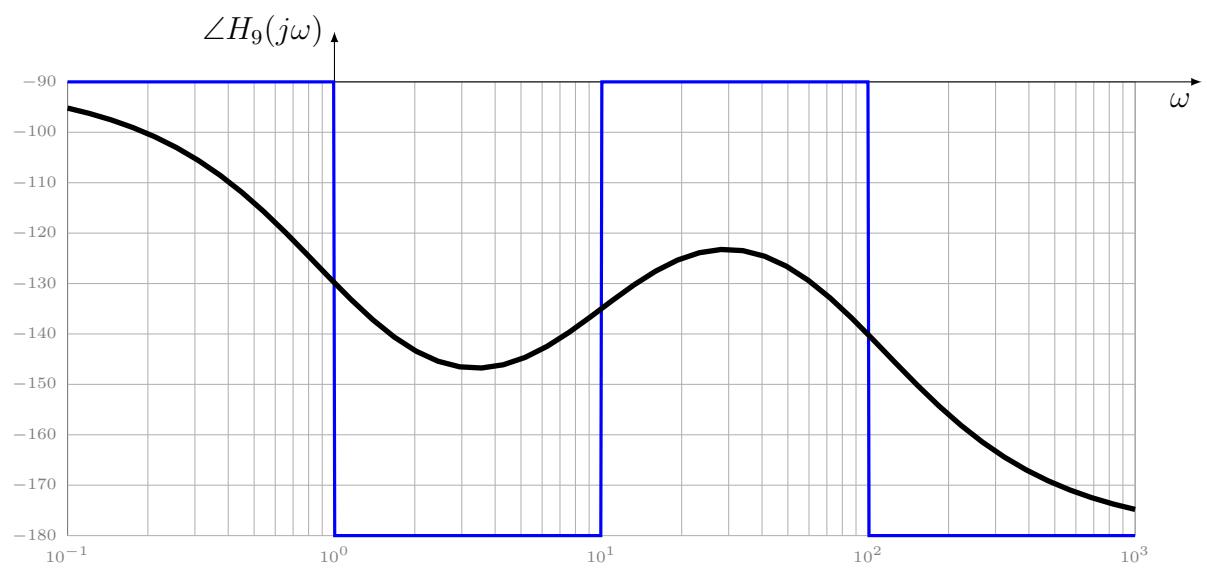
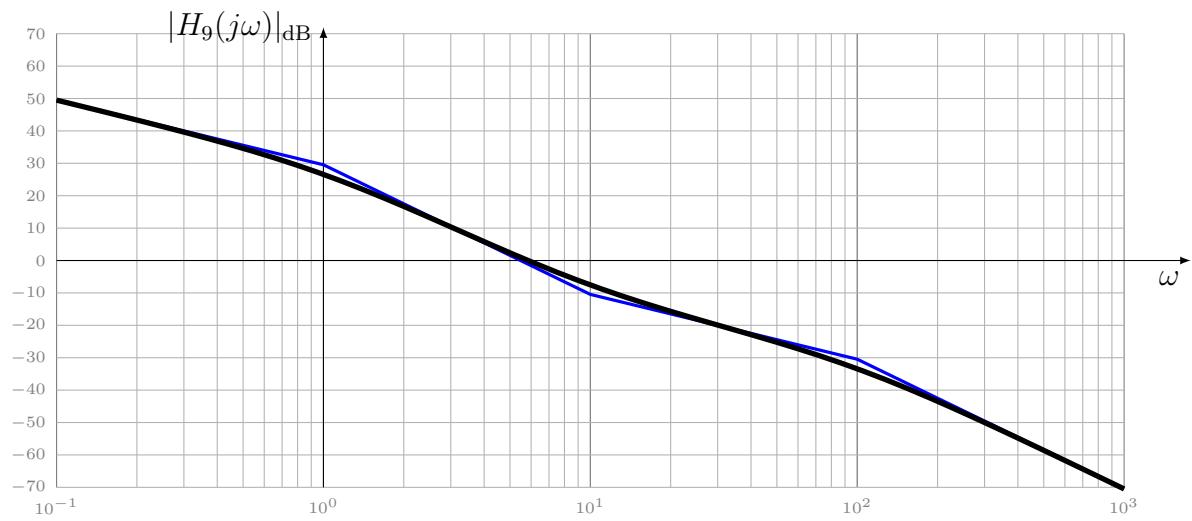
qui signifie que les 2 pulsations de cassure $\omega_1 = 1/\tau_1$ et $\omega_2 = 1/\tau_2$ sont symétriques par rapport à ω_0 . Exploitant la caractéristique du gain au niveau de la pulsation de cassure

$$20 \log(Q) = 20 \log\left(\frac{1}{10}\right) = -20 \text{ dB}$$

indépendante de ξ , on trouve $\omega_1 = \frac{\omega_0}{10} = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ d'où $\omega_2 = 10\omega_0 = 100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Ainsi, par somme on trouve :

- $\forall \omega \leq \omega_1$, $-20 \text{ dB}/\text{décade}$ et $-\pi/2$;
- $\forall \omega \in [\omega_1, \omega_k]$, $-40 \text{ dB}/\text{décade}$ et $-\pi$;
- $\forall \omega \in [\omega_k, \omega_2]$, $-20 \text{ dB}/\text{décade}$ et $-\pi/2$;
- $\forall \omega \geq \omega_2$ $-40 \text{ dB}/\text{décade}$ et $-\pi/2$.

Comme $\omega_k = \omega_0$, le tracé de l'argument est antisymétrique par rapport au point $(\omega_0, -3\pi/4)$.

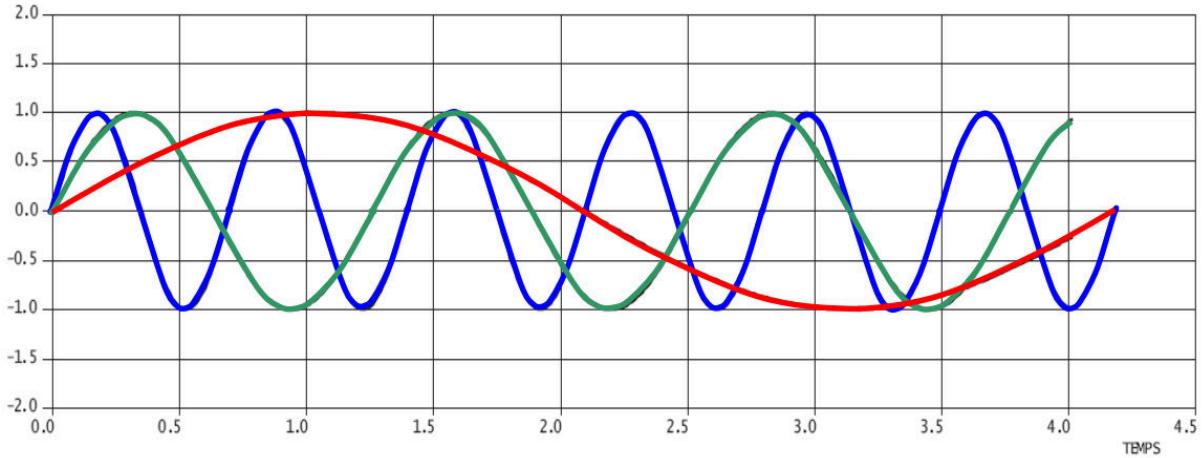


Question 1.2. Par théorème d'analyse harmonique, on a pour toute entrée du type

$$e(t) = \sin(\omega t) u(t), \quad \omega \in \mathbb{R}_*^+$$

une réponse du type

$$s(t) = |H_6(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H_6(j\omega)) u(t)$$



Pour les trois cas d'études on a :

Cas 1

$$T_1 = 4,2 \text{ s} \implies \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \approx 1,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

On lit sur les diagrammes de Bode de H_6 pour cette pulsation $\omega_1 \ll \omega_0$

$$|H_6(j\omega_1)|_{\text{dB}} = 30 \text{ dB} \implies |H_6(j\omega_1)| = 30 \quad \text{et} \quad \angle H_6(j\omega_1) = -5^\circ = -0,087 \text{ rad}$$

d'où

$$s_1(t) = 30 \sin(1,5t - 0,087) u(t)$$

Cas 2

$$T_2 = 1,25 \text{ s} \implies \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \approx 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

On lit sur les diagrammes de Bode de H_6 pour cette pulsation $\omega_2 < \omega_0$

$$|H_6(j\omega_2)|_{\text{dB}} = 31 \text{ dB} \implies |H_6(j\omega_2)| = 35 \quad \text{et} \quad \angle H_6(j\omega_2) = -35^\circ = -0,61 \text{ rad}$$

d'où

$$s_2(t) = 35 \sin(1,5t - 0,61) u(t)$$

Cas 3

$$T_3 = 0,7 \text{ s} \implies \omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} \approx 8,97 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

On lit sur les diagrammes de Bode de H_6 pour cette pulsation $\omega_3 \approx \omega_0$

$$|H_6(j\omega_3)|_{\text{dB}} = 31 \text{ dB} \implies |H_6(j\omega_3)| = 35 \quad \text{et} \quad \angle H_6(j\omega_3) = -80^\circ = -1,39 \text{ rad}$$

d'où

$$s_3(t) = 35 \sin(1,5t - 1,39) u(t)$$