

Espaces vectoriels de dimension finie

Cours de É. Bouchet – PCSI

2 février 2026

Table des matières

1	Définition et existence de bases	2
1.1	Familles génératrices finies	2
1.2	Construction de bases	2
2	Dimension d'un espace de dimension finie	3
2.1	Définition et premières propriétés	3
2.2	Caractérisations des bases	3
2.3	Rang d'une famille finie de vecteurs	4
3	Sous-espaces et dimensions	4
3.1	Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie	4
3.2	Sous-espaces vectoriels supplémentaires	5
3.3	Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires	5

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désignera \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Définition et existence de bases

1.1 Familles génératrices finies

Définition 1.1 (Espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que E est un **espace vectoriel de dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Remarque. E est donc de dimension finie lorsqu'il existe une famille (f_1, f_2, \dots, f_n) de vecteurs de E tels que

$$E = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Remarque. Par convention, $\{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple. On a déjà rencontré notamment :

- \mathbb{K}^n , espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) .
- $\mathbb{K}_n[X]$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$.

Proposition 1.2 (Modification d'une famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une de ses familles génératrices. Alors pour tout vecteur e_1 non nul de E , on peut trouver $n - 1$ vecteurs de \mathcal{F} (que par renumérotation éventuelle on note f_2, \dots, f_n) tels que la famille (e_1, f_2, \dots, f_n) est une famille génératrice de E .

Exemple. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$, et $(X + 1)^2 \neq 0$. On peut donc trouver une nouvelle famille qui engendre $\mathbb{K}_n[X]$:

$$((X + 1)^2, X, X^2, \dots, X^n) \text{ ou } ((X + 1)^2, 1, X^2, \dots, X^n) \text{ ou } ((X + 1)^2, 1, X, X^3, \dots, X^n)$$

Proposition 1.3 (Cardinaux des familles libres et génératrices)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Soit \mathcal{L} une famille libre finie de E et \mathcal{G} une famille génératrice finie de E , alors $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$.

Remarque. Une famille n'est pas un ensemble, mais on lui étend la définition de cardinal pour simplifier les écritures.

1.2 Construction de bases

Proposition 1.4 (Théorème de la base extraite)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. De toute famille génératrice finie de E , on peut extraire une base finie de E .

Proposition 1.5 (Existence de bases en dimension finie)

Tout espace vectoriel E de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins une base (finie).

Exercice 1. Soit $E = \text{Vect}(1, 1 + X, 5 + X)$. Déterminer une base de E .

Proposition 1.6 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E .

Exercice 2. Compléter $(X + 2, X + 1)$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On admet (la suite du chapitre le justifiera) qu'il suffit d'obtenir une famille libre à quatre éléments.

2 Dimension d'un espace de dimension finie

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1 (Dimension d'un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Cet entier naturel est appelé la **dimension** de l'espace vectoriel et est noté $\dim(E)$.

Remarque. Par convention $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Exemple. Cas des espaces vectoriels usuels (à connaître) :

- \mathbb{K}^n est un espace vectoriel de dimension n , dont une base est (e_1, e_2, \dots, e_n) .
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$, dont une base est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension np , dont une base est $(E_{i,j})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]}$.

Exemple. On a vu dans un chapitre précédent que $((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de l'espace vectoriel des suites vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

De manière générale, l'ensemble des suites récurrentes linéaires doubles vérifiant une relation donnée est un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble E des solutions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $-2y'' + y' + 3y = 0$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

2.2 Caractérisations des bases

Proposition 2.2 (Cardinal d'une famille libre ou génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- Toute famille libre \mathcal{L} de E vérifie $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq n$.
- Toute famille génératrice \mathcal{G} de E vérifie $\text{Card}(\mathcal{G}) \geq n$.

Remarque. L'hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$ permet d'écarter le cas $E = \{0_E\}$.

Proposition 2.3 (Caractérisation des familles libres ou génératrices par le cardinal)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit \mathcal{L} une famille libre de E . Alors \mathcal{L} est une base de E si et seulement si $\text{Card}(\mathcal{L}) = n$.
- Soit \mathcal{G} une famille génératrice de E . Alors \mathcal{G} est une base de E si et seulement si $\text{Card}(\mathcal{G}) = n$.

Exercice 4. Montrer que $(1, X + 1, X^2 + X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.3 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 2.4 (Rang d'une famille finie de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel et (f_1, f_2, \dots, f_p) une famille finie de vecteurs de E . On appelle **rang** de la famille (f_1, f_2, \dots, f_p) et on note $\text{rg}(f_1, f_2, \dots, f_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre :

$$\text{rg}(f_1, f_2, \dots, f_p) = \dim(\text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)).$$

Remarque. La famille étant finie, $\text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est nécessairement un espace vectoriel de dimension finie (il possède une famille génératrice finie), on peut donc bien étudier sa dimension.

Proposition 2.5 (Lien entre rang et liberté)

Soit E un espace vectoriel et (f_1, f_2, \dots, f_p) une famille finie de vecteurs de E . Alors $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) \leq p$ et :

$$\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = p \iff (f_1, \dots, f_p) \text{ est libre.}$$

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer les valeurs de $\text{rg}(X, X^2)$, $\text{rg}(1, X+1, X, X^2)$ et $\text{rg}((X+1)^2, X^2)$.

3 Sous-espaces et dimensions

3.1 Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 3.1 (Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E . Alors G est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(G) \leq \dim(E)$. De plus, si $\dim(G) = \dim(E)$, alors $G = E$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\dim(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$.
3. Conjecturer les valeurs de $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Définition 3.2 (Sous-espaces particuliers, cas particuliers)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

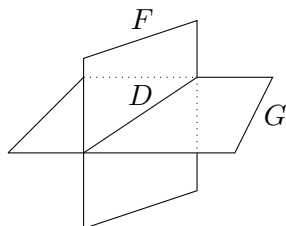
- Une **droite vectorielle** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.
- Un **plan vectoriel** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Proposition 3.3 (Formule de Grassman)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exemple. Considérons deux plans vectoriels F et G de \mathbb{R}^3 , qui se coupent selon une droite D .



On a bien $\dim(F + G) = 3 = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

3.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 3.4 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E . Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E qui est supplémentaire de F dans E .

Exercice 7. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$. Déterminer un supplémentaire à F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3.3 Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 3.5 (Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ,
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
3. $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
4. Si B_1 est une base de F et B_2 est une base de G , la famille B obtenue en juxtaposant les vecteurs de B_1 et B_2 est une base de E . On dit que la base B est **adaptée** à la décomposition en somme directe.