

**Exercice 1 (★).** Montrer que  $\mathcal{F} = ((1, -3, 0), (0, 2, 1), (1, 0, -1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 2 (★).** On pose  $E = \mathbb{R}[X]$ . Soient  $F = \text{Vect}(X, X^2)$  et  $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(2) = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
2. Montrer que  $F \cap G$  est une droite vectorielle.

**Exercice 3 (★).** On considère  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) + P'(1) = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer une base de  $F$  puis sa dimension.

**Exercice 4 (★).** Démontrer que l'ensemble  $E$  des suites arithmétiques à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

**Exercice 5 (★).** Soit  $F$  l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , solutions de  $y'' + y' - 2y = 0$ . Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie et déterminer une base.

**Exercice 6 (★).** Soit  $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c) \cos(x)\}$ .

1. Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Déterminer une base de  $E$  et sa dimension.

**Exercice 7 (★★).** Montrer que la famille  $(X^k(X-1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exercice 8 (★★).** Dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , soit  $H$  l'espace vectoriel des polynômes admettant 2 pour racine. Déterminer une base et la dimension de  $H$ .

**Exercice 9 (★).** On se place dans  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer le rang de la famille  $\mathcal{F} = ((3, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 1, 1))$ .

**Exercice 10 (★).** Déterminer le rang de la famille  $(X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, 2X, X^3 + 3)$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 11 (★★).** Dans l'ensemble des applications définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on donne les éléments  $f_0, f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  définis par : pour tout réel  $x$ ,

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \sin x \quad \text{et} \quad f_4(x) = \cos(2x).$$

Déterminer le rang de la famille  $S = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ .

**Exercice 12 (★).** Dans  $\mathbb{R}^4$ , on donne  $\varepsilon_1 = (1, 0, 1, 1), \varepsilon_2 = (2, 1, 3, 0), \varepsilon_3 = (1, -1, 1, 1)$ .

1. Prouver que  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^4$ , la compléter pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $G = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 13 (★).** On pose  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}$ . Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , puis en déterminer une base. Déterminer ensuite un supplémentaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 14 (★).** On pose  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid 3x + 4y + 5iz = 0\}$ .  $H$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^3$  ? Si oui, en donner une base et déterminer un sous-espace supplémentaire de  $H$  dans  $\mathbb{C}^3$ .

**Exercice 15 (★★).** Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $e_1 = (1, 1, 0)$ . On pose  $F_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = m\}$  et  $G = \text{Vect}(e_1)$ .

1. Déterminer les valeurs de  $m$  telles que  $F_m$  soit un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et en donner une base.
2. Prouver qu'alors  $\mathbb{R}^3 = F_m \oplus G$ .

**Exercice 16 (★).** On se place dans  $E = \mathbb{R}^3$ , avec  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que  $E = F \oplus G$ . Expliciter une base adaptée à cette somme directe.

**Exercice 17 (★★).** Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ . On pose  $F = \text{Vect}(X^2 - X, X^2 + 1)$  et  $G = \{P \in E \mid P(-1) = P'(-1) = 0\}$ .

1. Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Montrer que  $E = F \oplus G$  et déterminer une base de  $E$  adaptée à cette somme directe.
3. Déterminer la décomposition dans  $F \oplus G$  de  $R(X) = 4X^2 - 4X + 2$ .

**Exercice 18 (★★★).** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On suppose que  $F \neq \{0_E\}$  et  $F \neq E$ . Soit  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  et  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $G$ .

1. Montrer que si  $f \in F$ , la famille  $(e_1 + f, e_2 + f, \dots, e_r + f)$  est de rang  $r$ .
2. Soit  $f \in F$ , on note  $G_f = \text{Vect}(e_1 + f, e_2 + f, \dots, e_r + f)$ . Montrer que  $G_f$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .
3. Soit  $f$  et  $f'$  deux éléments distincts de  $F$ . Montrer que  $G_f \neq G_{f'}$ .
4. En déduire que  $F$  admet une infinité de supplémentaires.

**Exercice 19 (Type DS).** Soient  $a_1, \dots, a_{n+1}$  des réels deux à deux distincts. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , on pose :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

1. Pour cette question uniquement, on pose  $n = 1$ ,  $a_1 = 1$  et  $a_2 = 2$ . Calculer  $L_1(X)$  et  $L_2(X)$ .  
*On n'hésitera pas à se servir de cet exemple pour conjecturer les réponses des questions suivantes...*
2. (a) Soit  $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . Calculer  $L_i(a_i)$ .  
(b) Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ , avec  $i \neq j$ . Calculer  $L_i(a_j)$ .
3. On se place dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .
  - (a) Quel est le degré des polynômes  $L_i(X)$  ?
  - (b) Montrer que la famille  $(L_i(X))_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  - (c) En déduire que c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
4. Soient  $b_1, \dots, b_{n+1}$  des réels fixés. On pose :  $P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(X)$ . Ce polynôme s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux  $n+1$  couples de scalaires  $(a_i, b_i)$ .
  - (a) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux 2 couples  $(1, 1)$  et  $(2, 1)$ .
  - (b) On se place de nouveau dans le cadre général de  $n+1$  couples de scalaires  $(a_i, b_i)$ . Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange  $P$  est de degré inférieur à  $n$  et vérifie  $\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(a_j) = b_j$ .
  - (c) Montrer que  $P$  est l'unique polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui vérifie  $\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(a_j) = b_j$ .