Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 (★). Montrer que $\mathcal{F} = ((1,-3,0),(0,2,1),(1,0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Résultat attendu : On montre que c'est une famille libre à $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ éléments.

Exercice 2 (★). On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Soient $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(2) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Résultat attendu :

1. C'est immédiat pour F, on montre que G contient le polynôme nul et est stable par combinaison linéaire.
2. On montre que $X^2 - 2X$ est une base de $F \cap G$, donc $\dim(F \cap G) = 1$.

Exercice 3 (★). On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(1) + P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de F puis sa dimension.

Résultat attendu :

1. F contient le polynôme nul et est stable par combinaison linéaire.
2. Une base de F est $(X^2 - 3, X - 2)$ (d'autres familles étaient possibles). Donc F est de dimension 2.

Exercice 4 (★). Démontrer que l'ensemble E des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
Résultat attendu : C'est un sous-espace vectoriel de l'ensembles des suites réelles, de dimension 2.

Exercice 5 (★). Soit F l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$, solutions de $y'' + y' - 2y = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie et déterminer une base.
Résultat attendu : C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont une base est $(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-2t})$.

Exercice 6 (★). Soit $E = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x)\right\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Résultat attendu :

1. C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
2. Une base est $(x \to \cos(x), x \to x\cos(x), x \to x^2\cos(x))$ et $\dim(E) = 3$.

Exercice 7 (★★). Montrer que la famille $\left(X^k(X-1)^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Résultat attendu : On montre que c'est une famille libre à $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments.

Exercice 8 (★★). Dans $\mathbb{R}_n[X]$, soit H l'espace vectoriel des polynômes admettant 2 pour racine. Déterminer une base et la dimension de H.
Résultat attendu : H est de dimension n, de base par exemple $\Big(X^k(X-2)\Big)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ ou $\Big((X-2)^k\Big)_{k \in [\![1,n]\!]}$.

Exercice 9 (★). On se place dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = ((3,2,1),(1,2,3),(1,1,1))$.
Résultat attendu : On trouve $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 10 (★). Déterminer le rang de la famille $(X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, 2X, X^3 + 3)$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Résultat attendu : C'est une famille de rang 3.

Exercice 11 (★★). Dans l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on donne les éléments f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 définis par : pour tout réel x,

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \sin x \quad \text{et} \quad f_4(x) = \cos(2x).$$

Déterminer le rang de la famille $S = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$.
Résultat attendu : On trouve $\mathrm{rg}(S) = 4$.

Exercice 12 (★). Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $\varepsilon_1 = (1,0,1,1)$, $\varepsilon_2 = (2,1,3,0)$, $\varepsilon_3 = (1,-1,1,1)$.

1. Prouver que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Résultat attendu :

1. $\varepsilon_4 = (1,0,0,0)$ convient (par exemple).
2. La caractérisation des supplémentaires par les bases montre que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_4)$ convient.

Exercice 13 (★). On pose $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y+z=0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en déterminer une base. Déterminer ensuite un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.
Résultat attendu : E contient $(0,0,0)$ et est stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Une base est (par exemple) la famille $((1,0,0),(0,1,-1))$. En la complétant, on trouve que $F = \mathrm{Vect}((0,1,0))$ est (par exemple) un supplémentaire.

Exercice 14 (★). On pose $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 | 3x+4y+5iz=0\}$. H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$? Si oui, en donner une base et déterminer un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{C}^3$.
Résultat attendu : H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$. Une base de H est $((-\frac{4}{3},1,0),(-\frac{5i}{3},0,1))$ et un supplémentaire de H est $\mathrm{Vect}((1,0,0))$ (par exemple).

Exercice 15 (★★). Soit $m \in \mathbb{R}$ et $e_1 = (1,1,0)$. On pose $F_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-2y+z=m\}$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1)$.

1. Déterminer les valeurs de m telles que F_m soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Prouver qu'alors $\mathbb{R}^3 = F_m \oplus G$.

Résultat attendu :

1. On montre par analyse-synthèse que seul $m=0$ convient. Une base de F_0 est $((1,0,-1),(0,1,2))$.
2. N'importe laquelle des caractérisations convient.

Exercice 16 (★). On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, avec $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que $E = F \oplus G$. Expliciter une base adaptée à cette somme directe.
Résultat attendu : On utilise la caractérisation pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, puis on cherche des bases : $((1,1,1))$ est une base de G et $((1,0,-1),(0,1,-1))$ est une base de F. Les juxtaposer et montrer qu'on trouve une base de E permet de conclure.

Exercice 17 (★★). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose $F = \mathrm{Vect}(X^2-X, X^2+1)$ et $G = \{P \in E | P(-1) = P'(-1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$ et déterminer une base de E adaptée à cette somme directe.
3. Déterminer la décomposition dans $F \oplus G$ de $R(X) = 4X^2 - 4X + 2$.

Résultat attendu :

1. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
2. (X^2-X, X^2+1) est une base de F et $((X+1)^2)$ est une base de G. On utilise ensuite la caractérisation des supplémentaires par juxtaposition des bases.
3. $R(X) = \Big(2(X^2-X) + 3(X^2+1)\Big) - (X+1)^2$

Exercice 18 (★★★)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$. Soit G un supplémentaire de F dans E et $(e_1, \dots, e_r)$ une base de G.

1. Montrer que si $f \in F$, la famille $(e_1 + f, e_2 + f, \dots, e_r + f)$ est de rang r.
2. Soit $f \in F$, on note $G_f = \mathrm{Vect}(e_1 + f, e_2 + f, \dots, e_r + f)$. Montrer que G_f est un supplémentaire de F dans E.
3. Soit f et f' deux éléments distincts de F. Montrer que $G_f \neq G_{f'}$.
4. En déduire que F admet une infinité de supplémentaires.

Résultat attendu :

1. On montre que c'est une famille libre.
2. On revient à la définition du supplémentaire (attention : E n'est pas de dimension finie, donc on ne peut pas utiliser les caractérisations classiques des supplémentaires).
3. On raisonne par l'absurde ou par contraposée.
4. Découle directement des questions précédentes pour différentes valeurs de f.

Exercice 19 (Type DS)**.** Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

1. Pour cette question uniquement, on pose $n = 1$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$. Calculer $L_1(X)$ et $L_2(X)$.
   On n'hésitera pas à se servir de cet exemple pour conjecturer les réponses des questions suivantes...
2. (a) Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Calculer $L_i(a_i)$.
   (b) Soit $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, avec $i \neq j$. Calculer $L_i(a_j)$.
3. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Quel est le degré des polynômes $L_i(X)$?
   (b) Montrer que la famille $(L_i(X))_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soient $b_1, \ldots, b_{n+1}$ des réels fixés. On pose : $P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(X)$. Ce polynôme s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ couples de scalaires (a_i, b_i).
   (a) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux 2 couples $(1, 1)$ et $(2, 1)$.
   (b) On se place de nouveau dans le cadre général de $n+1$ couples de scalaires (a_i, b_i). Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange P est de degré inférieur à n et vérifie $\forall j \in [\![1, n+1]\!]$, $P(a_j) = b_j$.
   (c) Montrer que P est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie $\forall j \in [\![1, n+1]\!]$, $P(a_j) = b_j$.

Résultat attendu :

1. $L_1(X) = \dfrac{X-2}{1-2} = -X + 2$ et $L_2(X) = \dfrac{X-1}{2-1} = X - 1$.
2. (a) Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. $L_i(a_i) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n+1} 1 = 1$.
   (b) Soit $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, avec $i \neq j$. $L_i(a_j) = 0$ car le terme $k = j$ du produit est nul.
3. (a) Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$, $\deg(L_i(X)) = \sum_{k=1, k\neq i}^{n+1} \deg\left(\dfrac{X - a_k}{a_i - a_k}\right) = \sum_{k=1, k\neq i}^{n+1} 1 = (n+1) - 1 = n$.
   (b) La question précédente garantit que les $L_i(X)$ sont bien dans $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on suppose que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i L_i(X) = 0$. Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on évalue ce polynôme en a_i, ce qui donne $0 + \lambda_i 1 + 0 = 0$ (d'après la question 2), et donc $\lambda_i = 0$. Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$. La famille est donc bien une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) La famille $(L_i(X))_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ par la question précédente. Comme de plus elle contient $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. (a) $P(X) = L_1(X) + L_2(X) = -X + 2 + X - 1 = 1$ d'après la question 1.
   (b) On a montré en 3.a. que les $L_i(X)$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc P l'est aussi par combinaison linéaire. De plus, $\forall j \in [\![1, n+1]\!]$, $P(a_j) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(a_j) = 0 + b_j L_j(a_j) + 0 = b_j$ par la question 2.
   (c) On suppose que P et Q sont deux polynômes qui conviennent. Alors $P - Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
   De plus, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $(P - Q)(a_i) = P(a_i) - Q(a_i) = b_i - b_i = 0$. Or les a_i sont deux à deux distincts, donc $P - Q$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes.
   Donc $P - Q$ est le polynôme nul, et $P = Q$. D'où l'unicité.