

Développements limités et études locales

Cours de É. Bouchet – PCSI

2 février 2026

Table des matières

1	Développements limités	2
1.1	Définition et premières propriétés	2
1.2	Opérations sur les développements limités	3
1.3	Formule de Taylor-Young	3
1.4	Développements limités usuels en 0	4
1.5	Exemples de calculs	5
2	Étude locale de suites et de fonctions	5
2.1	Recherche de limite ou équivalent	5
2.2	Positions relatives de la courbe et sa tangente	5
2.3	Recherche d'asymptote	5
2.4	Recherche d'extremum local	6
2.5	Étude asymptotique de suites	6

Dans tout le chapitre, les fonctions et suites considérées sont à valeurs réelles, mais les résultats se généralisent sans difficulté au cas de valeurs complexes.

Développements limités

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1 (Développement limité)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f **admet un développement limité d'ordre n en a** lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$ est appelé la **partie régulière** du développement limité.

Exemple. On sait que $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$. Donc sinus admet un développement limité d'ordre 1 en 0 ($a_0 = 0, a_1 = 1$). Sa partie régulière est x .

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on sait que $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Donc $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Donc $\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$.

On en déduit que $\frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, qui vaut : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$.

Remarque. Un développement limité fournit des approximations polynomiales de f au voisinage du point étudié : la courbe $y = a_0$ est la meilleure approximation à l'ordre 0, $y = a_0 + a_1(x-a)$ la meilleure à l'ordre 1, etc.

Remarque. On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0, puisque $\lim_{h \rightarrow 0} (a+h) = a$: si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n).$$

Proposition 1.2 (Unicité du développement limité)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a . Si f admet un développement limité à l'ordre n en a , alors ce développement est unique.

Proposition 1.3 (Troncature)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a . On suppose que f admet un développement limité $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. Alors pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f admet un développement limité $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$.

Remarque. Si on connaît un développement limité d'une fonction à un ordre $n \in \mathbb{N}$, on en connaît donc aussi à tous les ordres inférieurs.

Exemple. La relation $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$ donne directement que $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$. Cette deuxième relation porte cependant moins d'informations que la première.

Proposition 1.4 (Cas des fonctions paires ou impaires)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0.

- Si f est paire, les coefficients de rang impair du développement limité sont nuls.
- Si f est impaire, les coefficients de rang pair du développement limité sont nuls.

Exemple. On a vu précédemment que $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$, donc par composition à droite :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + o((-x^2)^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

1.2 Opérations sur les développements limités

Proposition 1.5 (Somme de développements limités)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose que f et g admettent des développements limités d'ordre n en a . Alors $f + \lambda g$ admet un développement limité d'ordre n en a . La partie régulière du développement limité de $f + \lambda g$ est égale à la partie régulière du développement limité de f plus λ fois la partie régulière du développement limité de g .

Proposition 1.6 (Produit de développements limités)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose que f et g admettent des développements limités d'ordre n en a . Alors fg admet un développement limité d'ordre n en a . La partie régulière du développement limité de fg est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières de f et g .

Exercice 1. Déterminer un développement limité de $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$ à l'ordre 2 en 0.

Proposition 1.7 (Primitivation d'un développement limité)

Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction dérivable sur I .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que f' admet pour développement limité $f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$.

Alors f admet pour développement limité $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$

Remarque. Attention : dans le cas général, on ne peut par contre pas dériver un développement limité.

Proposition 1.8 (Développement limité de $\tan(x)$)

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

1.3 Formule de Taylor-Young

Proposition 1.9 (Existence d'un développement limité d'ordre 0)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie en a et au voisinage de ce point. La fonction f est continue en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en a . On a alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

Proposition 1.10 (Existence d'un développement limité d'ordre 1)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie en a et au voisinage de ce point. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a . On a alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a)).$$

Proposition 1.11 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I et $a \in I$, alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Remarque. On peut également écrire $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$.

1.4 Développements limités usuels en 0**Proposition 1.12** (Développement limité de la fonction exponentielle)

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Proposition 1.13 (Développement limité de $\text{sh}(x)$ et $\text{ch}(x)$)

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}), \\ \text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

Remarque. Les exposants $2k$ et $2k+1$ ont été introduits pour permettre d'avoir des formules simples, mais il faut garder à l'esprit que l'ordre d'un développement limité correspond à la puissance qui apparaît dans le o .

Exercice 2. Déterminer les développements limités en 0 de sh et ch à l'ordre 5.

Proposition 1.14 (Développement limité de la fonction inverse)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \\ \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Proposition 1.15 (Développement limité de la fonction logarithme)

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Proposition 1.16 (Développement limité de $\arctan(x)$)

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Proposition 1.17 (Développement limité des fonctions puissances)

Pour tout réel α ,

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Exercice 3. Déterminer un développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.

Proposition 1.18 (Développement limité de $\sin(x)$ et $\cos(x)$)

$$\begin{aligned}\sin(x) &=_{x \rightarrow 0} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}), \\ \cos(x) &=_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).\end{aligned}$$

1.5 Exemples de calculs

Exercice 4. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \cos x$.

Exercice 5. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \cos x$.

Exercice 6. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x} - \exp(x)$.

Exercice 7. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+x}$.

Exercice 8. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$.

Exercice 9. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+\ln(1+x)}$.

2 Étude locale de suites et de fonctions

2.1 Recherche de limite ou équivalent

Exercice 10. Montrer que la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $\forall x \in]0, 1], f(x) = \frac{2}{\sin(x)} - \frac{2}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 11. Déterminer un équivalent de la suite $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2.2 Positions relatives de la courbe et sa tangente

Exercice 12. Déterminer la tangente en 0 de la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $\forall x \in] -1, +\infty[, f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x}$ et étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

2.3 Recherche d'asymptote

Définition 2.1 (Asymptote)

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour **asymptote** au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand :

$$f(x) =_{x \rightarrow +\infty} ax + b + o(1) \quad (\text{resp. } f(x) =_{x \rightarrow -\infty} ax + b + o(1))$$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+2}$. Déterminer son asymptote au voisinage de $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Remarque : on pourrait utiliser une décomposition en éléments simples, mais on ne le fera pas ici pour travailler les compétences de développements limités.

2.4 Recherche d'extremum local

Remarque. Rappel : les extremums locaux d'une fonction de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, sur un intervalle quelconque, sont à chercher parmi :

- ses points critiques,
- les points où la fonction n'est pas dérivable,
- les bornes de l'intervalle.

Proposition 2.2 (Utilisation de la dérivée seconde)

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I et soit $c \in I$ un point critique de f . Alors,

- Si $f^{(2)}(c) > 0$, alors f possède un minimum local en c .
- Si $f^{(2)}(c) < 0$, alors f possède un maximum local en c .

Remarque. Si $f^{(2)}(c) = 0$, on ne peut rien conclure.

Exercice 14. Trouver les extremums de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1$ définie sur $[-2, \frac{3}{2}]$. Déterminer leur nature, et s'ils sont locaux ou globaux.

2.5 Étude asymptotique de suites

Exercice 15. On considère les suites $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ telles que $\begin{cases} x_n \rightarrow -\infty \\ e^{x_n} = x_n + n \end{cases}$ et $\begin{cases} y_n \rightarrow +\infty \\ e^{y_n} = y_n + n \end{cases}$.

Un exercice de la fiche d'exercices « Limites et continuité » garantit la bonne définition de ces suites, en déterminer des équivalents au voisinage de $+\infty$.

Exercice 16. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,$ on a $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$.
2. En déduire que $u_n = 1 + o(1)$:
3. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$:
4. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$:
5. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$: