

Probabilités

Cours de É. Bouchet – PCSI

2 février 2026

Table des matières

1	Expériences aléatoires	2
1.1	Contexte et vocabulaire probabiliste	2
1.2	Système complet d'événements	3
2	Espaces probabilisés finis	3
2.1	Définition et premier exemple	3
2.2	Détermination d'une probabilité	4
2.3	Propriétés	4
3	Probabilités conditionnelles	5
3.1	Définition	5
3.2	Formule des probabilités composées	5
3.3	Formule des probabilités totales	5
3.4	Formule de Bayes	6
4	Indépendance d'événements	6
4.1	Indépendance de deux événements	6
4.2	Indépendance d'une famille finie d'événements	7

1 Expériences aléatoires

1.1 Contexte et vocabulaire probabiliste

Définition 1.1 (Expérience aléatoire, univers)

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance. L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience est noté Ω et est appelé **l'univers** de l'expérience.

Définition 1.2 (Événement)

Soit Ω un univers fini. On appelle **événement** tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Remarque. Dans le cas d'un univers fini, un événement est donc un sous-ensemble de Ω .

Exercice 1. On lance un dé à six faces. On note A l'événement "obtenir un 6" et B l'événement "obtenir un nombre pair". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de A et B .

Exercice 2. On lance deux dés : un rouge et un noir. On note A l'événement "obtenir un double 6", B l'événement "obtenir un double" et C l'événement "obtenir au moins un 6". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de A , B et C .

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce n fois, avec la convention que 1 représente pile et 0 face. On note A l'événement "n'obtenir que des piles", B l'événement "obtenir un pile au second lancer" et C l'événement "obtenir au moins un pile". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de A , B et C .

Exercice 4. Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule, dans une urne de N boules numérotées de 1 à N . On note A l'événement "ne jamais obtenir la boule N " et B l'événement "toujours tirer le même numéro". Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de A et B .

Remarque. Le vocabulaire des événements est lié à celui des ensembles :

Vocabulaire des événements	Vocabulaire des ensembles	Notation
événement élémentaire	singleton	$\{\omega\}$, avec $\omega \in \Omega$
événement contraire de A	complémentaire de A	$\bar{A} = \Omega \setminus A$
événement certain	ensemble Ω	Ω
événement impossible	ensemble vide	$\emptyset$
les événements A et B sont réalisés	on est dans l'intersection de A et B	$A \cap B$
les événements A ou B sont réalisés	on est dans la réunion de A et B	$A \cup B$
les événements A et B sont incompatibles	les ensembles A et B sont disjoints	$A \cap B = \emptyset$
l'événement A implique l'événement B	l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B	$A \subset B$

Exemple. Soit Ω un univers fini, B un événement et $(A_i)_{i \in [1, n]}$ une famille d'événements.

- $\bigcup_{i=1}^n A_i$ correspond à : au moins un des événements A_i est réalisé (A_1 ou A_2 ou ... ou A_n).
- $\bigcap_{i=1}^n A_i$ correspond à : les événements A_i sont tous réalisés (A_1 et A_2 et ... et A_n).
- $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$ correspond à : aucun des événements A_i n'est réalisé.
- $\bigcap_{i=1}^n A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i}$ correspond à : au moins un des événements A_i n'est pas réalisé.

5. $\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i) = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)$ correspond à : l'événement B est réalisé et au moins un des événements A_i .
6. $\bigcap_{i=1}^n (B \cup A_i) = B \cup \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)$ correspond à : l'événement B est réalisé ou tous les événements A_i sont réalisés.

1.2 Système complet d'événements

Définition 1.3 (Système complet d'événements)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i \in [1, n]} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$. On dit que $(A_i)_{i \in [1, n]}$ est un **système complet d'événements** de Ω lorsque :

- les événements A_i sont deux à deux incompatibles : $\forall (i, j) \in [1, n]^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.
- les événements A_i recouvrent l'univers : $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Remarque. Cela correspond (en vocabulaire ensembliste) à la notion de partition d'un ensemble.

Remarque. De manière évidente,

- $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système complet d'événements de Ω .
- Si $A \subset \Omega$ alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements de Ω .

Exemple. Soit $\Omega = [1, 6]$ l'univers associé à un lancer de dé.

- $(\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\})$ est un système complet d'événements de Ω .
- $(\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\})$ est un système complet d'événements de Ω .
- $(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\})$ est un système complet d'événements de Ω .
- $(\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ est un système complet d'événements de Ω .

Proposition 1.4 (Décomposition d'un événement sur un système complet d'événements)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i=1}^n$ un système complet d'événements. Tout événement B peut se décomposer comme $B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$, où les événements $B \cap A_i$ sont incompatibles deux à deux.

Remarque. Ce résultat est pratique quand on cherche à faire apparaître des disjonctions de cas.

2 Espaces probabilisés finis

2.1 Définition et premier exemple

Définition 2.1 (Probabilité)

Soit Ω un univers fini. On appelle **probabilité** toute application P définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$, vérifiant $P(\Omega) = 1$ et telle que si A et B sont deux événements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque. On montre ensuite par récurrence que pour toute famille d'événements $(A_i)_{i \in [1, n]}$ deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

En particulier, si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω , $\sum_{i=1}^n P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(\Omega) = 1$.

Définition 2.2 (Espace probabilisé)

Si P est une probabilité, on dit que (Ω, P) est un **espace probabilisé**.

Définition 2.3 (Probabilité uniforme)

Soit Ω un univers fini. L'application P qui à un événement A associe $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ est une probabilité, appelée **probabilité uniforme**.

Remarque. La relation $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ est rencontrée au lycée sous la forme $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$. On parle aussi de situation d'équiprobabilité (car tous les événements élémentaires ont la même probabilité).

Exemple. On lance un dé équilibré. La probabilité d'obtenir le numéro $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ est alors $\frac{\text{Card}(\{i\})}{\text{Card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)} = \frac{1}{6}$.

Exemple. Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules identiques numérotées de 1 à n . On en tire une au hasard : la probabilité que ce soit la boule numéro $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est alors $\frac{\text{Card}(\{i\})}{\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket)} = \frac{1}{n}$.

Exercice 5. On lance deux dés équilibrés de couleurs différentes (un noir et un rouge), quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 ?

2.2 Détermination d'une probabilité**Définition 2.4** (Distribution de probabilités)

Soit E un ensemble fini. On appelle **distribution de probabilités** sur E toute famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ indexée par E et dont la somme est égale à 1.

Exemple. Soit $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\forall i \in E, p_i = \frac{1}{n}$. Ces valeurs sont toutes positives, et $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$. Donc $(p_i)_{i \in E}$ forme une distribution de probabilités.

Proposition 2.5 (Détermination d'une probabilité sur les événements élémentaires)

Soit Ω un univers fini et $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilités sur Ω .
Il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$.

Remarque. La démonstration montre également que pour tout événement $A, P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$.

Exercice 6. On lance un dé pipé à 6 faces qui donne 1 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et chacune des autres faces avec probabilité $\frac{3}{20}$. Calculer la probabilité d'obtenir une face impaire.

2.3 Propriétés**Proposition 2.6** (Lien avec les opérations sur les événements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. Alors :

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proposition 2.7 (Croissance de P)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. P est une application croissante (au sens de l'inclusion) :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \quad A \subset B \implies P(A) \leq P(B).$$

Exercice 7. On effectue une succession de pile ou face. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose A_n l'événement "il y a au moins un pile dans les n premiers lancers" et $u_n = P(A_n)$. Montrer que la suite u est convergente.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition

Définition 3.1 (Probabilité conditionnelle)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) \neq 0$. On définit un nouvel espace probabilisé (Ω, P_B) en posant :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On appelle P_B la **probabilité conditionnelle** relative à B et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B .

Remarque. On utilise parfois la notation $P(A|B)$ à la place de $P_B(A)$.

Remarque. Soit A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$. Alors $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$. Le conditionnement donne donc une méthode pour calculer certaines probabilités d'intersections.

Remarque. Quand $P(B) = 0$, on ne sait pas définir $P_B(A)$. On décide par convention que $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$ reste quand même vraie. Cette convention se justifie car si $P(B) = 0$, la croissance de P donne les inégalités $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$, donc $P(A \cap B) = 0$.

Exercice 8. Un sac contient cinq boules : trois noires et deux blanches. On y tire deux boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité qu'elles soient noires toutes les deux ?

3.2 Formule des probabilités composées

Proposition 3.2 (Formule des probabilités composées)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exercice 9. On tire trois fois de suite, sans remise, dans une urne composée de 7 boules blanches et 6 rouges. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on pose B_i = "le i -ème tirage donne une boule blanche" et R_i = "le i -ème tirage donne une boule rouge". Calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$.

3.3 Formule des probabilités totales

Proposition 3.3 (Formule des probabilités totales)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P_{A_i}(B).$$

Remarque. En particulier soit A et B deux événements. Comme $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) P_A(B) + P(\overline{A}) P_{\overline{A}}(B).$$

Remarque. La formule des probabilités totales est particulièrement utile dans les contextes où le tirage aléatoire est réalisé en deux étapes : on utilise alors le système complet d'événements qui liste les résultats qu'on peut obtenir à la première étape.

Exercice 10. On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 . On choisit une urne au hasard, et on pioche une boule dedans. On suppose que $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, l'urne U_i contient i boules blanches et 3 boules noires. Quelle est la probabilité que la boule piochée soit noire ?

3.4 Formule de Bayes

Proposition 3.4 (Formule de Bayes)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit A, B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) P_A(B)}{P(A) P_A(B) + P(\overline{A}) P_{\overline{A}}(B)}.$$

Exercice 11. Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie, qui touche une personne sur 100 000 :
 — lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas.
 — lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.
 Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?

4 Indépendance d'événements

4.1 Indépendance de deux événements

Définition 4.1 (Indépendance de deux événements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

Remarque. ATTENTION, ne pas confondre INDÉPENDANCE et INCOMPATIBILITÉ :

- L'indépendance ne peut se juger qu'en rapport à la probabilité. A et B sont indépendants pour P lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- L'incompatibilité est une notion ensembliste, qui ne dépend pas de la probabilité. A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$ et on a alors (mais c'est une conséquence) : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exercice 12. On dispose de deux pièces, une équilibrée et une truquée. On lance un dé équilibré à 6 faces :

- si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
- si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée (pile avec probabilité $\frac{1}{3}$).

On note A = "obtenir pile au premier lancer de la pièce", B = "obtenir pile au second lancer de la pièce" et C = "le lancer du dé donne le chiffre 1". Étudier l'indépendance de A et B pour P et P_C .

Proposition 4.2 (Indépendance et probabilité conditionnelle)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tels que $P(A) \neq 0$. Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(B) = P_A(B)$.

Proposition 4.3 (Complémentaire et indépendance)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont indépendants.
- A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque. Ce résultat se généralisera sans difficulté au cas de n événements.

4.2 Indépendance d'une famille finie d'événements**Définition 4.4** (Indépendance d'une famille d'événements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une **famille d'événements (mutuellement)**

indépendants si pour tout $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, $P\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} P(A_k)$.

Remarque. ATTENTION : vérifier $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k)$ n'est pas suffisant. Pas plus qu'il ne suffit de vérifier que les événements sont indépendants deux à deux.

Exercice 13. On effectue un lancer de pile ou face. Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui vérifient $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.

Exercice 14. On lance deux fois une pièce équilibrée. Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui sont indépendants deux à deux, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.