

Exercice 1 (★). Soit A , B et C trois événements d'un même espace probabilisé (Ω, P) . Simplifier les événements suivants :

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $A \cap (A \cap B)$ | 2. $A \cup (A \cap B)$ | 3. $A \cap (A \cap B \cap C)$ | 4. $B \cup (A \cap B \cap C)$ |
| 5. $\overline{A} \cap (A \cap B)$ | 6. $\overline{A} \cap (A \cup B)$ | | |

Résultat attendu :

- | | | | |
|----------------|--------------------------|----------------------|--------|
| 1. $A \cap B$ | 2. A | 3. $A \cap B \cap C$ | 4. B |
| 5. $\emptyset$ | 6. $\overline{A} \cap B$ | | |

Exercice 2 (★). Soit A , B et C trois événements d'un même espace probabilisé (Ω, P) . À l'aide d'opérations sur les ensembles, exprimer les événements suivants en fonction de A , B et C :

- A_1 = "l'un au moins des trois événements se réalise"
- A_2 = " A se réalise, mais pas B et pas C "
- A_3 = "un et un seul des trois événements se réalise"
- A_4 = "au moins deux des trois événements se réalisent"
- A_5 = "exactement deux des trois événements se réalisent"
- A_6 = "aucun des trois événements ne se réalise"
- A_7 = "deux au plus se réalisent"

Résultat attendu :

- | | |
|--|---|
| 1. $A_1 = A \cup B \cup C$ | 2. $A_2 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ |
| 3. $A_3 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$ | 4. $A_4 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ |
| 5. $A_5 = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$ | 6. $A_6 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ |
| 7. $A_7 = \overline{A \cap B \cap C}$ | |

Exercice 3 (★). Un étudiant connaît une proportion $p \in]0, 1[$ du programme. Lors du contrôle, si l'étudiant ne connaît pas la réponse, il répond au hasard parmi 3 choix possibles. La réponse à une question étant bonne, quelle est la probabilité que l'étudiant connaisse effectivement la réponse ?

Résultat attendu : La probabilité vaut $\frac{3p}{2p+1}$, par formule des probabilités totales et formule de Bayes.

Exercice 4 (★). Trois urnes contiennent des boules noires et blanches.

- L'urne U_1 contient 3 noires et 2 blanches.
- L'urne U_2 contient 4 noires et 6 blanches.
- L'urne U_3 contient 1 noires et 4 blanches.

On choisit au hasard une urne et on y pioche une boule.

- Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
- Sachant qu'elle est blanche, quelle est la probabilité que l'urne utilisée ait été U_1 ?

Résultat attendu : Les probabilités valent $\frac{3}{5}$ (formule des probabilités totales) et $\frac{2}{9}$ (formule de Bayes).

Exercice 5 (★). Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , qu'on tire successivement sans remise. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer la probabilité que la i -ème boule tirée porte le numéro i

Résultat attendu : La probabilité vaut $\frac{1}{n}$, par formule des probabilités composées et télescopage.

Exercice 6 (★★). Une urne contient 3 boules rouges et 3 boules blanches. On tire deux boules au hasard, que l'on met dans un sac. Puis on tire au hasard une de ces deux boules.

- Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
- Sachant qu'elle l'est, quelle est la probabilité que la boule encore dans le sac le soit aussi ?

Résultat attendu : Les probabilités recherchées valent $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{5}$.

Exercice 7 (★★). Pour monter un appareil, on utilise des pièces provenant de deux fournisseurs A et B. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance) d'un tel appareil durant une année est de 0.9 s'il est monté uniquement avec des pièces du fournisseur A ; de 0.7 s'il est monté uniquement avec des pièces du fournisseur B ; et de 0.8 s'il est monté avec un mélange des pièces des deux fournisseurs A et B. De plus, les pièces du fournisseur A sont utilisées dans 80% des appareils et celles du fournisseur B dans 50% des appareils. Un appareil est extrait au hasard de la chaîne de montage. Calculer la fiabilité de l'appareil pour une période d'un an.

Résultat attendu : La probabilité recherchée vaut $\frac{83}{100}$.

Exercice 8 (★). On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On pose E_k l'événement « le premier pile est au k -ième lancer ». Calculer $P(E_k)$.
2. Soit E l'événement « on tire au moins un pile ». En utilisant la question précédente, calculer $P(E)$.

Résultat attendu : On trouve $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(E_k) = (1-p)^{k-1}p$ et $P(E) = 1 - (1-p)^n$.

Exercice 9 (★). Dans une usine, un service contrôle les colis destinés à la livraison. Pour chaque colis, ce contrôle est effectué par deux personnes, qui travaillent de manière indépendante. Quand un colis est non conforme, chaque contrôleur a 90 pour cent de chances de le détecter. On sait d'autre part que 5 pour cent des colis sont non conformes.

On étudie un colis en particulier. On note alors A l'événement "le colis n'est pas conforme" et C_i l'événement "le contrôleur numéro i annonce que le colis n'est pas conforme".

1. Quelle est la probabilité que le colis soit non conforme et ne soit pas détecté ?
2. Quelle est la probabilité que le colis soit non conforme et soit détecté ?
3. Quelle est la probabilité que le colis soit déclaré bon pour la livraison ?

Résultat attendu :

$$1. P(A \cap \overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = \frac{5}{10000} \quad 2. P(A \cap (C_1 \cup C_2)) = \frac{495}{10000} \quad 3. P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = \frac{9505}{10000}$$

Exercice 10 (★). On lance n fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus une fois face ?

Résultat attendu : La probabilité vaut $\frac{1+2n}{2^n}$.

Exercice 11 (★★). On dispose de deux dés A et B .

- Le dé A a 4 faces rouges et 2 blanches.
- Le dé B a 2 faces rouges et 4 blanches.

On commence par choisir aléatoirement un de ces deux dés : A avec probabilité $\frac{1}{3}$ et B avec probabilité $\frac{2}{3}$. Une fois le dé choisi, on effectue plusieurs lancers, sans changer de dé.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une face rouge au premier lancer ?
2. On a obtenu rouge aux 2 premiers lancers. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé A ?
3. On a obtenu rouge aux n premiers lancers. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé A ? Comment se comporte cette probabilité lorsque $n \rightarrow +\infty$?
4. On a obtenu rouge aux n premiers lancers. Quelle est la probabilité d'obtenir rouge au $(n+1)$ -ème ? Comment se comporte cette probabilité lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Résultat attendu :

$$1. \frac{4}{9} \quad 2. \frac{2}{3} \quad 3. \frac{2^n}{2^{n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad 4. \frac{1}{3} \frac{2^n+1}{2^{n-1}+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$$

Exercice 12 (★★). A chaque repas, un lion mange soit un zèbre avec une probabilité $\frac{1}{3}$, soit une gazelle avec une probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose que les compositions des repas du lion sont indépendantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer la probabilité u_n qu'en n repas, le lion n'ait jamais mangé deux gazelles consécutives. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de n .

Résultat attendu : On montre la relation en utilisant la formule des probabilités totales. Les formules de suites récurrentes linéaires doubles donnent alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

Exercice 13 (★★★). Dans une file d'attente de $n \geq 2$ personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Soit $m \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ?

Résultat attendu : La probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes vaut $\frac{2(n-m-1)}{n(n-1)}$. Cette valeur est maximale pour $m = 0$.

Exercice 14 (Type DS). On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A_1, A_2 et A_3 . On suppose qu'initialement le mobile se trouve en A_1 . Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : si le mobile est en A_i ,

- il passe en A_j ($j \neq i$) avec la probabilité $\frac{2}{5}$ dans les deux cas.
- il reste en A_i avec la probabilité $\frac{1}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les événements : U_n = "après n déplacements le mobile se trouve en A_1 "; V_n = "après n déplacements le mobile se trouve en A_2 "; W_n = "après n déplacements le mobile se trouve en A_3 ". On pose $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$.

1. Déterminer u_0 , v_0 et w_0 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.
4. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n , v_n et w_n en fonction de n .
6. Quelles sont les limites des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) ?

Résultat attendu :

1. Le mobile est initialement en A_1 , donc $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, (U_n, V_n, W_n) forme un système complet d'événements. Donc par formule des probabilités totales, $P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(U_{n+1}) + P(W_n)P_{W_n}(U_{n+1})$.

Les probabilités de transition fournies dans l'énoncé donnent donc $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n$. De même, en appliquant la formule à V_{n+1} puis W_{n+1} , on trouve $v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n$ puis $w_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}w_n$.

Il ne reste plus qu'à passer à l'écriture matricielle pour obtenir $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence la propriété $P(n)$: « $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ ».
- $\frac{1}{5^0} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = 1I_3 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, donc $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. D'après la question précédente,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5^n} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n+1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat demandé.

4. $J^0 = I_3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons par récurrence la propriété $P(n)$: « $J^n = 3^{n-1}J$ ».
- $3^{1-1}J = 1J = J^1$ donc $P(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Un premier calcul donne $J^2 = 3J$. On en déduit :

$$J^{n+1} = J^n \times J = 3^{n-1}J \times J = 3^{n-1} \times 3J = 3^n J = 3^{(n+1)-1}J.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Donc $J^0 = I_3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$.

5. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on remarque que $M = 2J - I_3$. De plus, $(2J) \times (-I_3) = -2J = (-I_3) \times (2J)$, donc par formule du binôme de Newton (puis en utilisant la question précédente) : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2J)^k (-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} J^k = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) J.$$

Donc $M^n = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} (5^n - (-1)^n) J$.

Donc d'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5^n} \left(\frac{5^n - (-1)^n}{3} + (-1)^n \right) \\ \frac{1}{5^n} \frac{5^n - (-1)^n}{3} \\ \frac{1}{5^n} \frac{5^n - (-1)^n}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2(-1)^n}{3 \times 5^n} \\ \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \times 5^n} \\ \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \times 5^n} \end{pmatrix}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2(-1)^n}{3 \times 5^n}$, $v_n = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \times 5^n}$ et $w_n = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \times 5^n}$.

6. Par la question précédente et comme $|\frac{-1}{5}| < 1$, (u_n) , (v_n) et (w_n) tendent vers $\frac{1}{3}$.