

Applications linéaires : introduction

Cours de É. Bouchet – PCSI

26 février 2026

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Définitions et premières propriétés	2
1.2	Opérations usuelles	2
1.3	Isomorphismes	3
2	Noyau, image et rang	3
2.1	Noyau et image	3
2.2	Rang	4
3	Endomorphismes	5
3.1	Définitions et opérations usuelles	5
3.2	Projecteurs et symétries	6
3.3	Automorphismes	7

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 (Application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application de E dans F . On dit que f est une **application linéaire** de E dans F si elle vérifie : $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Proposition 1.2 (Valeur en 0)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . Alors $f(0_E) = 0_F$.

Proposition 1.3 (Caractérisation d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. La fonction f est une application linéaire de E dans F si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Exercice 1. Montrer que l'application $P \mapsto P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f((x, y)) = x + y + 1$.
2. La fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $g((x, y)) = x + y$.
3. La fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $h((x, y)) = x \times y$.

Exercice 3. Montrer que l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par $f(M) = M^\top$ est une application linéaire.

1.2 Opérations usuelles

Proposition 1.4 (Espace vectoriel des applications linéaires)

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 1.5 (Composée de deux applications linéaires)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F , et g est une application linéaire de F dans G , alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

Proposition 1.6 (Distributivité de la composition)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si f et g sont des applications de E dans F , et h est une application linéaire de F dans G , alors $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.

Remarque. On savait déjà que si f est une application de E dans F , et g et h sont des applications de F dans G , alors $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$, sans condition de linéarité.

1.3 Isomorphismes

Définition 1.7 (Isomorphisme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F . On dit que f est un **isomorphisme** de E dans F lorsqu'elle est bijective de E dans F .

Exemple. L'application identité de E , notée id_E et définie par $x \mapsto x$ est un isomorphisme de E .

Proposition 1.8 (Réciproque d'un isomorphisme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et f un isomorphisme de E dans F . Alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

Proposition 1.9 (Composée d'isomorphismes)

Soit E , F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E dans F , et g est un isomorphisme de F dans G , alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G , et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2 Noyau, image et rang

2.1 Noyau et image

Proposition 2.1 (Image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et H un sous-espace vectoriel de E . Alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Remarque. On rappelle que $f(H) = \{f(x) | x \in H\}$.

Proposition 2.2 (Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et G un sous-espace vectoriel de F . Alors $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque. On rappelle que $f^{-1}(G) = \{x \in E | f(x) \in G\}$.

Définition 2.3 (Image d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . On appelle **image** de f , et on note $\text{Im}(f)$, l'image directe de E par f .

Remarque. On a donc :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{y \in F | \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

De plus, d'après les résultats précédents, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Exercice 4. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x, y)) = x + y$. Déterminer son image.

Proposition 2.4 (Image et surjectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . La fonction f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Remarque. On peut également noter que $\text{Im}(f) = \{0_F\}$ si et seulement si f est l'application nulle.

Définition 2.5 (Noyau d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F . On appelle **noyau** de f , et on note $\text{Ker}(f)$, l'image réciproque de $\{0_F\}$ par f .

Remarque. On a donc :

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

De plus, d'après les résultats précédents, $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 5. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x, y)) = x + y$. Déterminer son noyau.

Proposition 2.6 (Noyau et injectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F . La fonction f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Remarque. On peut également noter que $\text{Ker}(f) = E$ si et seulement si f est l'application nulle.

Exercice 6. On considère l'application linéaire $f : P \mapsto P'$ définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver son noyau et son image. Est-elle injective ? surjective ?

Proposition 2.7 (Famille génératrice de $\text{Im}(f)$)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une de ses familles génératrices. Alors :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Remarque. C'est en particulier vrai lorsque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Exercice 7. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Montrer que c'est une application linéaire et déterminer $\text{Im}(f)$.

2.2 Rang

Définition 2.8 (Rang d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . On dit que f est **de rang fini** quand $\text{Im}(f)$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle **rang** de f , et on note $\text{rg}(f)$ la valeur :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(f(E)).$$

Remarque. La fonction nulle est la seule application de rang 0.

Remarque. $\text{Im}(f) \subset F$ donc si F est de dimension finie, $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(F)$. On en déduit $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$.

Remarque. Si E est un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base $(e_1, \dots, e_n)$. On a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \leq n$, et en particulier $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$.

Exercice 8. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Déterminer son rang.

Proposition 2.9 (Rang de la composée)

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v)).$$

Proposition 2.10 (Petit lemme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire injective de E dans F . Alors l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F .

Proposition 2.11 (Invariance du rang par composition par un isomorphisme)

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- Si u est un isomorphisme, $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$.
- Si v est un isomorphisme, $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$.

3 Endomorphismes

3.1 Définitions et opérations usuelles

Définition 3.1 (Endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel. On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans E .

Définition 3.2 (Homothétie)

Soit E un espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **homothétie** de rapport λ l'endomorphisme h de E défini par $\forall x \in E, h(x) = \lambda x$.

Remarque. On a alors $h = \lambda \text{id}_E$, où id_E est l'application identité de E .

Proposition 3.3 (Espace vectoriel des endomorphismes)

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3.4 (Puissances d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^0 = \text{id}_E$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{p+1} = f^p \circ f = f \circ f^p$.

Remarque. On a ainsi $f^0 = \text{id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f \dots$

Remarque. Attention : la notation puissance se réfère habituellement à des produits, mais ici, il s'agit bien de compositions, pas de produits !

Exemple. L'application $f : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. On peut donc définir ses puissances : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(P(X)) = P^{(n)}(X)$.

Proposition 3.5 (Formule du binôme de Newton)

Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

3.2 Projecteurs et symétries

Dans toute cette partie, on notera E un espace vectoriel, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Pour tout vecteur $x \in E$, on note (x_1, x_2) l'unique couple de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

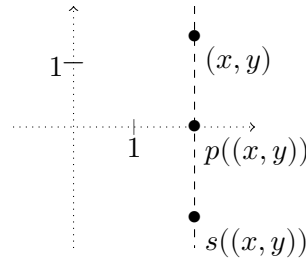
Définition 3.6 (Projecteur, symétrie)

On appelle **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p définie par $\forall x \in E$, $p(x) = x_1$.

On appelle **symétrie** par rapport à F_1 parallèlement à F_2 l'application s définie par $\forall x \in E$, $s(x) = x_1 - x_2$.

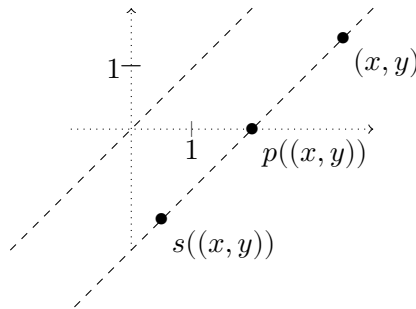
Exemple. $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1, 0)) \oplus \text{Vect}((0, 1))$, avec $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$.

- $p : (x, y) \mapsto (x, 0)$ est le projecteur sur $\text{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\text{Vect}((0, 1))$.
- $s : (x, y) \mapsto (x, -y)$ est la symétrie par rapport à $\text{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\text{Vect}((0, 1))$.



Exemple. $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1, 0)) \oplus \text{Vect}((1, 1))$, avec $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) = (x - y, 0) + (y, y)$.

- $(x, y) \mapsto (x - y, 0)$ est le projecteur sur $\text{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\text{Vect}((1, 1))$.
- $(x, y) \mapsto (x - 2y, -y)$ est la symétrie par rapport à $\text{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\text{Vect}((1, 1))$.



Remarque. p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 quand $p|_{F_1} = \text{id}_E$ et $p|_{F_2} = 0$.
 s est la symétrie par rapport à F_1 , parallèlement à F_2 quand $s|_{F_1} = \text{id}_E$ et $s|_{F_2} = -\text{id}_E$.

Proposition 3.7 (Linéarité des projecteurs et symétries)

Les projecteurs et les symétries définis sur E sont des endomorphismes de E .

Proposition 3.8 (Caractéristiques d'un projecteur)

Soit p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 . Alors $F_1 = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $F_2 = \text{Ker}(p)$.

Proposition 3.9 (Caractéristiques d'une symétrie)

Soit s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 . Alors $F_1 = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $F_2 = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Proposition 3.10 (Caractérisation des projecteurs)

Soit f un endomorphisme de E . La fonction f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

Exercice 9. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Montrer que f est un projecteur, en précisant ses caractéristiques.

Proposition 3.11 (Caractérisation des symétries)

Soit f un endomorphisme de E . La fonction f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \text{id}_E$.

3.3 Automorphismes

Définition 3.12 (Automorphisme, groupe linéaire de E)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On dit que f est un **automorphisme** de E lorsqu'elle est bijective de E dans E .

On appelle **groupe linéaire** de E et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Remarque. Pour être un automorphisme, il faut donc être à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

Exemple. Les symétries sont des automorphismes, les homothéties de rapport non nul aussi.

Proposition 3.13 (Propriétés des automorphismes)

Soit E un espace vectoriel. Alors :

- $\forall (u, v) \in GL(E)^2, u \circ v \in GL(E)$.
- $\forall u \in GL(E), u \circ \text{id}_E = u = \text{id}_E \circ u$.
- $\forall u \in GL(E), u^{-1} \in GL(E)$.

Remarque. Soit $u \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$. On peut définir u^k par : $u^k = \begin{cases} \text{id}_E & \text{si } k = 0 \\ \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}} & \text{si } k > 0 \\ \underbrace{u^{-1} \circ \dots \circ u^{-1}}_{-k \text{ fois}} & \text{si } k < 0 \end{cases}$