

# Probabilités

Cours de É. Bouchet – PCSI

11 mars 2026

## Table des matières

|          |                                                         |          |
|----------|---------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Expériences aléatoires</b>                           | <b>2</b> |
| 1.1      | Contexte et vocabulaire probabiliste . . . . .          | 2        |
| 1.2      | Système complet d'événements . . . . .                  | 3        |
| <b>2</b> | <b>Espaces probabilisés finis</b>                       | <b>4</b> |
| 2.1      | Définition et premier exemple . . . . .                 | 4        |
| 2.2      | Détermination d'une probabilité . . . . .               | 5        |
| 2.3      | Propriétés . . . . .                                    | 6        |
| <b>3</b> | <b>Probabilités conditionnelles</b>                     | <b>6</b> |
| 3.1      | Définition . . . . .                                    | 6        |
| 3.2      | Formule des probabilités composées . . . . .            | 7        |
| 3.3      | Formule des probabilités totales . . . . .              | 8        |
| 3.4      | Formule de Bayes . . . . .                              | 8        |
| <b>4</b> | <b>Indépendance d'événements</b>                        | <b>9</b> |
| 4.1      | Indépendance de deux événements . . . . .               | 9        |
| 4.2      | Indépendance d'une famille finie d'événements . . . . . | 10       |

# 1 Expériences aléatoires

## 1.1 Contexte et vocabulaire probabiliste

### Définition 1.1 (Expérience aléatoire, univers)

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance. L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience est noté  $\Omega$  et est appelé **l'univers** de l'expérience.

### Définition 1.2 (Événement)

Soit  $\Omega$  un univers fini. On appelle **événement** tout élément de  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

**Remarque.** Dans le cas d'un univers fini, un événement est donc un sous-ensemble de  $\Omega$ .

**Exercice 1.** On lance un dé à six faces. On note  $A$  l'événement « obtenir un 6 » et  $B$  l'événement « obtenir un nombre pair ». Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de  $A$  et  $B$ .

Solution :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ ,  $A = \{6\}$  et  $B = \{2, 4, 6\}$ .

**Exercice 2.** On lance deux dés : un rouge et un noir. On note  $A$  l'événement « obtenir un double 6 »,  $B$  l'événement « obtenir un double » et  $C$  l'événement « obtenir au moins un 6 ». Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Solution : On choisit arbitrairement de donner le résultat du dé rouge en premier.

$$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2, A = \{(6, 6)\}, B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} = \bigcup_{i=1}^6 \{(i, i)\} = \{(i, i) | i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

$$\text{et } C = (\llbracket 1, 6 \rrbracket \times \{6\}) \cup (\{6\} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket) = \Omega \setminus (\llbracket 1, 5 \rrbracket^2).$$

**Exercice 3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On lance une pièce  $n$  fois, avec la convention que 1 représente pile et 0 face. On note  $A$  l'événement « n'obtenir que des piles »,  $B$  l'événement « obtenir un pile au second lancer » et  $C$  l'événement « obtenir au moins un pile ». Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Solution :  $\Omega = \{0, 1\}^n$ ,  $A = \{1\}^n = \{(1, \dots, 1)\}$ ,  $B = \{0, 1\} \times \{1\} \times \{0, 1\}^{n-2}$

$$\text{et } C = \bigcup_{j=1}^n (\{0, 1\}^{j-1} \times \{1\} \times \{0, 1\}^{n-j}) = \Omega \setminus \{0\}^n.$$

**Exercice 4.** Soit  $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . On effectue  $n$  tirages successifs avec remise d'une boule, dans une urne de  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ . On note  $A$  l'événement « ne jamais obtenir la boule  $N$  » et  $B$  l'événement « toujours tirer le même numéro ». Déterminer l'univers associé, puis les écritures ensemblistes de  $A$  et  $B$ .

Solution :  $\Omega = \llbracket 1, N \rrbracket^n$ ,  $A = \llbracket 1, N-1 \rrbracket^n$  et  $B = \bigcup_{i=1}^N \{i\}^n$ .

**Remarque.** Le vocabulaire des événements est lié à celui des ensembles :

| Vocabulaire des événements                          | Vocabulaire des ensembles                     | Notation                                |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------|
| <b>événement élémentaire</b>                        | singleton                                     | $\{\omega\}$ , avec $\omega \in \Omega$ |
| <b>événement contraire</b> de $A$                   | complémentaire de $A$                         | $\overline{A} = \Omega \setminus A$     |
| <b>événement certain</b>                            | ensemble $\Omega$                             | $\Omega$                                |
| <b>événement impossible</b>                         | ensemble vide                                 | $\emptyset$                             |
| les événements $A$ et $B$ sont réalisés             | on est dans l'intersection de $A$ et $B$      | $A \cap B$                              |
| les événements $A$ ou $B$ sont réalisés             | on est dans la réunion de $A$ et $B$          | $A \cup B$                              |
| les événements $A$ et $B$ sont <b>incompatibles</b> | les ensembles $A$ et $B$ sont disjoints       | $A \cap B = \emptyset$                  |
| l'événement $A$ implique l'événement $B$            | l'ensemble $A$ est inclus dans l'ensemble $B$ | $A \subset B$                           |

**Exemple.** Soit  $\Omega$  un univers fini,  $B$  un événement et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille d'événements.

1.  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  correspond à : au moins un des événements  $A_i$  est réalisé ( $A_1$  ou  $A_2$  ou ... ou  $A_n$ ).
2.  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  correspond à : les événements  $A_i$  sont tous réalisés ( $A_1$  et  $A_2$  et ... et  $A_n$ ).
3.  $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$  correspond à : aucun des événements  $A_i$  n'est réalisé.
4.  $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$  correspond à : au moins un des événements  $A_i$  n'est pas réalisé.
5.  $\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i) = B \cap \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right)$  correspond à : l'événement  $B$  est réalisé et au moins un des événements  $A_i$ .
6.  $\bigcap_{i=1}^n (B \cup A_i) = B \cup \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right)$  correspond à : l'événement  $B$  est réalisé ou tous les événements  $A_i$  sont réalisés.

## 1.2 Système complet d'événements

### Définition 1.3 (Système complet d'événements)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega$  un univers fini et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ . On dit que  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est un **système complet d'événements** de  $\Omega$  lorsque :

- les événements  $A_i$  sont deux à deux incompatibles :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ .
- les événements  $A_i$  recouvrent l'univers :  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ .

**Remarque.** Cela correspond (en vocabulaire ensembliste) à la notion de partition d'un ensemble.

**Remarque.** De manière évidente,

- $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .
- Si  $A \subset \Omega$  alors  $(A, \overline{A})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .

**Exemple.** Soit  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$  l'univers associé à un lancer de dé.

$(\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .

$(\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .

$(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .

$(\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .

### Proposition 1.4 (Décomposition d'un événement sur un système complet d'événements)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega$  un univers fini et  $(A_i)_{i=1}^n$  un système complet d'événements. Tout événement  $B$  peut se décomposer comme  $B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$ , où les événements  $B \cap A_i$  sont incompatibles deux à deux.

*Démonstration.* On a par la définition d'un système complet d'événements et par distributivité :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i).$$

De plus, soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Si  $i \neq j$ ,  $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \emptyset = \emptyset$  par incompatibilité des  $A_i$ . D'où le résultat.  $\square$

**Remarque.** Ce résultat est pratique quand on cherche à faire apparaître des disjonctions de cas.

## 2 Espaces probabilisés finis

### 2.1 Définition et premier exemple

#### Définition 2.1 (Probabilité)

Soit  $\Omega$  un univers fini. On appelle **probabilité** toute application  $P$  définie de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $[0, 1]$ , vérifiant  $P(\Omega) = 1$  et telle que si  $A$  et  $B$  sont deux événements incompatibles alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**Remarque.** On montre ensuite par récurrence que pour toute famille d'événements  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

En particulier, si  $(A_1, \dots, A_n)$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ ,  $\sum_{i=1}^n P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(\Omega) = 1$ .

#### Définition 2.2 (Espace probabilisé)

Si  $P$  est une probabilité, on dit que  $(\Omega, P)$  est un **espace probabilisé**.

#### Définition 2.3 (Probabilité uniforme)

Soit  $\Omega$  un univers fini. L'application  $P$  qui à un événement  $A$  associe  $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$  est une probabilité, appelée **probabilité uniforme**.

*Démonstration.* L'application  $P$  est bien définie de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $[0, 1]$ , puisque si  $A \subset \Omega$ ,  $0 \leq \text{Card}(A) \leq \text{Card}(\Omega)$ . Il est aussi immédiat que  $P(\Omega) = \frac{\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(\Omega)} = 1$ . Enfin, si  $A$  et  $B$  sont deux événements incompatibles,

$$P(A \cup B) = \frac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A) + \text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

La fonction  $P$  est donc bien une probabilité.  $\square$

**Remarque.** La relation  $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$  est rencontrée au lycée sous la forme  $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$ . On parle aussi de situation d'équiprobabilité (car tous les événements élémentaires ont la même probabilité).

**Exemple.** On lance un dé équilibré. La probabilité d'obtenir le numéro  $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$  est alors  $\frac{\text{Card}(\{i\})}{\text{Card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)} = \frac{1}{6}$ .

**Exemple.** Une urne contient  $n \in \mathbb{N}^*$  boules identiques numérotées de 1 à  $n$ . On en tire une au hasard : la probabilité que ce soit la boule numéro  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  est alors  $\frac{\text{Card}(\{i\})}{\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket)} = \frac{1}{n}$ .

**Exercice 5.** On lance deux dés équilibrés de couleurs différentes (un noir et un rouge), quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 ?

Solution : On note  $A$  l'événement « obtenir une somme égale à 6 ». Alors, par équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(\{(1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2)\})}{\text{Card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket^2)} = \frac{5}{36}.$$

## 2.2 Détermination d'une probabilité

### Définition 2.4 (Distribution de probabilités)

Soit  $E$  un ensemble fini. On appelle **distribution de probabilités** sur  $E$  toute famille d'éléments de  $\mathbb{R}_+$  indexée par  $E$  et dont la somme est égale à 1.

**Exemple.** Soit  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $\forall i \in E, p_i = \frac{1}{n}$ . Ces valeurs sont toutes positives, et  $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ . Donc  $(p_i)_{i \in E}$  forme une distribution de probabilités.

### Proposition 2.5 (Détermination d'une probabilité sur les événements élémentaires)

Soit  $\Omega$  un univers fini et  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  une distribution de probabilités sur  $\Omega$ .  
Il existe une et une seule probabilité  $P$  sur  $\Omega$  telle que  $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$ .

*Démonstration.* On raisonne par analyse-synthèse :

- Supposons que  $P$  est une telle probabilité. Soit  $A$  un événement de  $\Omega$ , on obtient en se ramenant à une réunion d'événements deux à deux incompatibles :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

- Réciproquement, soit  $P$  l'application définie sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  par  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ . Alors :

- Soit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $P(A) \in [0, 1]$  car  $0 \leq \sum_{\omega \in A} p_\omega \leq \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ .
- $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ .
- Soit  $\omega \in \Omega$ , on obtient bien  $P(\{\omega\}) = p_\omega$ .
- Soit  $A$  et  $B$  deux événements incompatibles,  $P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p_\omega = \sum_{\omega \in A} p_\omega + \sum_{\omega \in B} p_\omega = P(A) + P(B)$ .

Donc  $P$  convient.

Donc il existe une et une seule probabilité  $P$  sur  $\Omega$  telle que  $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$ . □

**Remarque.** La démonstration montre également que pour tout événement  $A$ ,  $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ .

**Exercice 6.** On lance un dé pipé à 6 faces qui donne 1 avec probabilité  $\frac{1}{4}$  et chacune des autres faces avec probabilité  $\frac{3}{20}$ . Calculer la probabilité d'obtenir une face impaire.

Solution : Pour modéliser ce lancer, on se place dans l'univers  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ . On utilise la probabilité  $P$  définie par la distribution de probabilités  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20})$  sur  $\Omega$  (les valeurs se somment bien à 1).

Soit  $I$  l'événement « on obtient une face impaire », on trouve alors :

$$P(I) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}.$$

## 2.3 Propriétés

### Proposition 2.6 (Lien avec les opérations sur les événements)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ . Alors :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ,
- $P(\emptyset) = 0$ ,
- Si  $A \subset B$ , alors  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

*Démonstration.*

- Comme  $A$  et  $\overline{A}$  sont incompatibles, l'additivité donne  $P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$ .
- Par le point précédent,  $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$ .
- Comme  $A \subset B$ ,  $P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$ , où on peut utiliser l'additivité car  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ . D'où le résultat.
- $P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$ , par additivité, car  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ . Donc  $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  par le point précédent, car  $A \cap B \subset B$ .

□

### Proposition 2.7 (Croissance de $P$ )

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé.  $P$  est une application croissante (au sens de l'inclusion) :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \quad A \subset B \implies P(A) \leq P(B).$$

*Démonstration.* Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ , on suppose que  $A \subset B$ . On a alors  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ . Comme de plus  $P$  est positive, on trouve  $P(B) = P(B \setminus A) + P(A) \geq P(A)$ , ce qu'il fallait démontrer. □

**Exercice 7.** On effectue une succession de pile ou face. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $A_n$  l'événement « il y a au moins un pile dans les  $n$  premiers lancers » et  $u_n = P(A_n)$ . Montrer que la suite  $u$  est convergente.

Solution : On remarque que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$ . En effet, s'il y a au moins un pile dans les  $n$  premiers lancers, il y en aura aussi au moins un dans les  $n + 1$  premiers lancers. Donc par croissance de la probabilité,  $u_n = P(A_n) \leq P(A_{n+1}) = u_{n+1}$ . Ce qui signifie que la suite  $u$  est croissante.

Or  $u$  est également majorée par 1 (c'est une suite de probabilités). Elle est donc croissante et majorée : c'est une suite convergente.

## 3 Probabilités conditionnelles

### 3.1 Définition

#### Définition 3.1 (Probabilité conditionnelle)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(B) \neq 0$ . On définit un nouvel espace probabilisé  $(\Omega, P_B)$  en posant :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On appelle  $P_B$  la **probabilité conditionnelle** relative à  $B$  et  $P_B(A)$  la probabilité de  $A$  sachant  $B$ .

**Remarque.** On utilise parfois la notation  $P(A|B)$  à la place de  $P_B(A)$ .

*Démonstration.* Il faut montrer que  $P_B$  est bien une probabilité :

- Soit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , par croissance de la probabilité,  $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$ , donc en divisant par  $P(B) > 0$ , on trouve bien  $0 \leq P_B(A) \leq 1$ .
- $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ .
- Soit  $A_1$  et  $A_2$  deux événements incompatibles. Alors  $A_1 \cap B$  et  $A_2 \cap B$  sont incompatibles, donc :  

$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2).$$

Donc  $P_B$  est bien une probabilité. □

**Remarque.** Soit  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(B) \neq 0$ . Alors  $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$ . Le conditionnement donne donc une méthode pour calculer certaines probabilités d'intersections.

**Remarque.** Quand  $P(B) = 0$ , on ne sait pas définir  $P_B(A)$ . On décide par convention que  $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$  reste quand même vraie. Cette convention se justifie car si  $P(B) = 0$ , la croissance de  $P$  donne les inégalités  $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$ , donc  $P(A \cap B) = 0$ .

**Exercice 8.** Un sac contient cinq boules : trois noires et deux blanches. On y tire deux boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité qu'elles soient noires toutes les deux ?

Solution : On pose  $N_1$  l'événement « la première boule est noire » et  $N_2$  l'événement « la deuxième boule est noire ». Alors par équiprobabilité des tirages,

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

### 3.2 Formule des probabilités composées

#### Proposition 3.2 (Formule des probabilités composées)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probablisé. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

*Démonstration.* Si  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = 0$ , comme  $A_1 \cap \dots \cap A_n \subset A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$ , la croissance de  $P$  donne directement  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = 0$  et on a  $0 = 0$ .

Sinon  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ , ce qui garantit par croissance de  $P$  que tous les conditionnements sont bien définis. Un produit télescopique donne alors :

$$P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) = P(A_1) \prod_{k=2}^n P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) = P(A_1) \prod_{k=2}^n \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_k)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})} = P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$

□

**Exercice 9.** On tire trois fois de suite, sans remise, dans une urne composée de 7 boules blanches et 6 rouges. Pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , on pose  $B_i$  = « le  $i$ -ème tirage donne une boule blanche » et  $R_i$  = « le  $i$ -ème tirage donne une boule rouge ». Calculer  $P(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$ .

Solution : Comme on est en situation d'équiprobabilité, la formule des probabilités composées donne :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(R_3) = \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{21}{143}.$$

### 3.3 Formule des probabilités totales

#### Proposition 3.3 (Formule des probabilités totales)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements. Alors pour tout événement  $B$ ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P_{A_i}(B).$$

*Démonstration.* On décompose l'événement  $B$  sur le système complet d'événements  $(A_1, \dots, A_n)$  :  $B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$  et les  $(B \cap A_i)$  sont incompatibles deux à deux. L'additivité de la probabilité donne alors :  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$ . Par définition de la probabilité conditionnelle (et la convention établie dans le cas d'une probabilité nulle), pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(B \cap A_i) = P(A_i)P_{A_i}(B)$ . En remplaçant cette expression dans la formule précédente, on obtient la deuxième égalité.  $\square$

**Remarque.** En particulier soit  $A$  et  $B$  deux événements. Comme  $(A, \bar{A})$  est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

**Remarque.** La formule des probabilités totales est particulièrement utile dans les contextes où le tirage aléatoire est réalisé en deux étapes : on utilise alors le système complet d'événements qui liste les résultats qu'on peut obtenir à la première étape.

**Exercice 10.** On considère trois urnes  $U_1, U_2$  et  $U_3$ . On choisit une urne au hasard, et on pioche une boule dedans. On suppose que  $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , l'urne  $U_i$  contient  $i$  boules blanches et 3 boules noires. Quelle est la probabilité que la boule piochée soit noire ?

Solution : On note  $A$  l'événement « piocher une boule noire » et  $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $B_i$  l'événement « piocher dans l'urne  $U_i$  ».  $(B_1, B_2, B_3)$  forme un système complet d'événements, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60},$$

où on a terminé le calcul en utilisant l'équiprobabilité.

On peut faire le dessin avec un arbre pour illustrer, mais attention : ça n'est pas une preuve !

### 3.4 Formule de Bayes

#### Proposition 3.4 (Formule de Bayes)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $A, B$  deux événements tels que  $P(B) \neq 0$ . Alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)}.$$

*Démonstration.* La définition du conditionnement donne  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$

On applique ensuite la formule des probabilités totales au système complet d'événements  $(A, \bar{A})$  :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B),$$

ce qui donne la deuxième égalité.  $\square$

**Exercice 11.** Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie, qui touche une personne sur 100 000 :

- lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas.
- lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.

Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?

Solution : On note  $M$  l'événement « la personne est malade » et  $T$  l'événement « le test est positif ». L'énoncé nous donne :

$$P_M(T) = 0,998 \quad P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,996 \quad P(M) = \frac{1}{100000},$$

et on cherche à calculer  $P_T(M)$ . On commence par calculer  $P(T)$ , pour vérifier qu'il est non nul. Pour cela, on applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements  $(M, \bar{M})$  :

$$P(T) = P(M)P_M(T) + P(\bar{M})P_{\bar{M}}(T) = 0,00001 \times 0,998 + 0,99999 \times (1 - 0,996) = 0,00400994 \neq 0.$$

On obtient alors par la formule de Bayes :

$$P_T(M) = \frac{P(M)P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,00001 \times 0,998}{0,00400994} = \frac{0,00000998}{0,00400994} = 0,0025.$$

Donc même si le test est positif, il y a très peu de chances que la personne soit malade (0,25%). Ce résultat contre-intuitif est dû au nombre très faible de personnes malades dans la population.

## 4 Indépendance d'événements

### 4.1 Indépendance de deux événements

#### Définition 4.1 (Indépendance de deux événements)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

**Remarque.** ATTENTION, ne pas confondre INDÉPENDANCE et INCOMPATIBILITÉ :

- L'indépendance ne peut se juger qu'en rapport à la probabilité.  $A$  et  $B$  sont indépendants pour  $P$  lorsque  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .
- L'incompatibilité est une notion ensembliste, qui ne dépend pas de la probabilité.  $A$  et  $B$  sont incompatibles lorsque  $A \cap B = \emptyset$  et on a alors (mais c'est une conséquence) :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**Exercice 12.** On dispose de deux pièces, une équilibrée et une truquée. On lance un dé équilibré à 6 faces :

- si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
- si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée (pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$ ).

On note  $A$  = « obtenir pile au premier lancer de la pièce »,  $B$  = « obtenir pile au second lancer de la pièce » et  $C$  = « le lancer du dé donne le chiffre 1 ». Étudier l'indépendance de  $A$  et  $B$  pour  $P$  et  $P_C$ .

Solution : Si  $C$  est réalisé, on sait que c'est la pièce équilibrée qui est utilisée. On a donc par équiprobabilité :

$$P_C(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P_C(A)P_C(B),$$

donc il y a indépendance de  $A$  et  $B$  sous  $P_C$ .

Par ailleurs, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements  $(C, \bar{C})$ , on obtient :

$$P(A \cap B) = P(C)P_C(A \cap B) + P(\bar{C})P_{\bar{C}}(A \cap B) = P(C)P_C(A \cap B) + P(\bar{C})P_{\bar{C}}(A)P_{\bar{C} \cap A}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{29}{216}$$

et

$$P(B) = P(A) = P(C)P_C(A) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{6^2}.$$

Donc  $P(A)P(B) = \frac{13^2}{6^4} \neq \frac{29}{216}$ . Donc  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants sous  $P$ .

**Proposition 4.2** (Indépendance et probabilité conditionnelle)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$  tels que  $P(A) \neq 0$ . Les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P(B) = P_A(B)$ .

*Démonstration.* Cela découle directement des équivalences suivantes, dues à la définition de probabilité conditionnelle :

$$P(B) = P_A(B) \iff P(B)P(A) = P_A(B)P(A) \iff P(B)P(A) = P(A \cap B).$$

□

**Proposition 4.3** (Complémentaire et indépendance)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A$  et  $B$  sont indépendants.
- $A$  et  $\overline{B}$  sont indépendants.
- $\overline{A}$  et  $B$  sont indépendants.
- $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  sont indépendants.

*Démonstration.* On va montrer que  $(A \text{ et } B \text{ indépendants})$  implique  $(A \text{ et } \overline{B} \text{ indépendant})$ , toutes les équivalences en découlent ensuite directement. Supposons donc que  $A$  et  $B$  sont indépendants. Alors

$$P(A)P(\overline{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) - P(A)P(B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B}),$$

où la dernière égalité se montre en appliquant la formule des probabilités totales à  $A$  et au système complet d'événements  $(B, \overline{B})$  ou en remarquant que  $A \cap B \subset A$  et  $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B))$ .

Donc  $A$  et  $\overline{B}$  sont indépendants. D'où le résultat. □

**Remarque.** Ce résultat se généralisera sans difficulté au cas de  $n$  événements.

## 4.2 Indépendance d'une famille finie d'événements

**Définition 4.4** (Indépendance d'une famille d'événements)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $(A_i)_{i \in [1, n]}$  est une **famille d'événements (mutuellement)**

**indépendants** si pour tout  $J \subset [1, n]$ ,  $P\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} P(A_k)$ .

**Remarque.** ATTENTION : vérifier  $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k)$  n'est pas suffisant. Pas plus qu'il ne suffit de vérifier que les événements sont indépendants deux à deux.

**Exercice 13.** On effectue un lancer de pile ou face. Déterminer une famille d'événements  $(A, B, C)$  qui vérifient  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ , mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.  
Solution : On pose  $A = \text{« tirer à la fois pile et face »}$  et  $B = C = \text{« tirer pile »}$ . Alors :

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 = 0 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C).$$

Il n'y a pourtant pas indépendance mutuelle car  $B$  et  $C$  ne sont pas indépendants :

$$P(B \cap C) = P(B) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P(B)P(C).$$

**Exercice 14.** On lance deux fois une pièce équilibrée. Déterminer une famille d'événements  $(A, B, C)$  qui sont indépendants deux à deux, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.

Solution : On pose  $A =$  « le premier lancer donne pile »,  $B =$  « le deuxième lancer donne pile », et  $C =$  « les deux lancers ne donnent pas le même résultat ».

Alors  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$  et  $P(C) = P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = \frac{1}{2}$  (par dénombrement direct ou en remarquant que les événements de l'union sont incompatibles et les lancers sont indépendants). On a de plus :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B), \text{ donc } A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}$$

$$P(A \cap C) = P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{4} = P(A)P(C), \text{ donc } A \text{ et } C \text{ sont indépendants.}$$

$$P(B \cap C) = P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{4} = P(B)P(C), \text{ donc } B \text{ et } C \text{ sont indépendants.}$$

Par contre,  $P(A \cap B \cap C) = 0$ , car on ne peut pas obtenir à la fois deux piles et deux résultats différents. Comme  $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8} \neq 0$ , il ne s'agit pas d'une famille d'événements mutuellement indépendants.