

# Applications linéaires : approfondissements

Cours de É. Bouchet – PCSI

26 février 2026

## Table des matières

|          |                                                                    |          |
|----------|--------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Détermination d'une application linéaire en dimension finie</b> | <b>2</b> |
| 1.1      | Images de bases . . . . .                                          | 2        |
| 1.2      | Espaces isomorphes . . . . .                                       | 2        |
| 1.3      | Restriction d'une application linéaire . . . . .                   | 3        |
| <b>2</b> | <b>Théorème du rang</b>                                            | <b>3</b> |
| <b>3</b> | <b>Équations linéaires</b>                                         | <b>4</b> |
| <b>4</b> | <b>Formes linéaires et hyperplans</b>                              | <b>4</b> |

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Détermination d'une application linéaire en dimension finie

### 1.1 Images de bases

#### Proposition 1.1 (Définition par l'image d'une base)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et on note  $(e_1, \dots, e_n)$  une de ses bases. Alors une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  est définie de manière unique par la donnée de la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .

**Exercice 1.** Déterminer l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui vérifie  $f((1, 0)) = (2, 1)$  et  $f((0, 1)) = (1, 1)$ .

#### Proposition 1.2 (Caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et on note  $(e_1, \dots, e_n)$  une de ses bases. Alors :

- $f$  est injective si et seulement si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille libre de  $F$ .
- $f$  est surjective si et seulement si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille génératrice de  $F$ .
- $f$  est bijective si et seulement si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$ .

**Exercice 2.** Soit  $f$  l'application linéaire définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  par  $f((1, 0, 0)) = (1, 0)$ ,  $f((0, 1, 0)) = (1, 1)$  et  $f((0, 0, 1)) = (0, 1)$ . Est-elle injective, surjective ?

### 1.2 Espaces isomorphes

#### Définition 1.3 (Espaces vectoriels isomorphes)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On dit que  $E$  et  $F$  sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque.** Si  $f$  est un isomorphisme de  $F$  dans  $E$ , alors  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ . Donc  $E$  et  $F$  sont aussi isomorphes s'il existe un isomorphisme de  $F$  dans  $E$ .

#### Proposition 1.4 (Isomorphismes et dimension $n$ )

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est de dimension  $n$  si et seulement si il est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

#### Proposition 1.5 (Isomorphismes et dimension)

Deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimension finie sont isomorphes si et seulement si  $\dim(E) = \dim(F)$ .

**Remarque.** Une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions différentes ne peut donc pas être bijective.

#### Proposition 1.6 (Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ )

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie, et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

**Proposition 1.7** (Lien entre injectivité, surjectivité, bijectivité et dimensions)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie tels que  $\dim(E) = \dim(F)$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}.$$

**Remarque.** Ce résultat s'applique en particulier aux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

**Exercice 3.** Soit  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (a, b) & \mapsto & (a+b)X + b \end{matrix}$ . Montrer que c'est un isomorphisme.

**Proposition 1.8** (Cas particulier de la réciproque en dimensions finies)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie tels que  $\dim(E) = \dim(F)$ ,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $E$ . Alors :

- Si  $f \circ g = \text{id}_F$ ,  $f$  est bijective et  $f^{-1} = g$ .
- Si  $g \circ f = \text{id}_E$ ,  $f$  est bijective et  $f^{-1} = g$ .

**Exemple.** Si  $s$  est une symétrie, la relation  $s^2 = \text{id}_E$  implique que  $s$  est un bijective, et que  $s^{-1} = s$ .

**Exercice 4.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^5$  vérifiant  $f \circ f - f = 3 \text{id}$ . Montrer que  $f$  est un automorphisme et déterminer l'expression de  $f^{-1}$ .

### 1.3 Restriction d'une application linéaire

**Proposition 1.9** (Caractérisation par la restriction à deux sous-espaces supplémentaires)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  supplémentaires. Soit  $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$  et  $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ . Alors il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  qui coïncide avec  $f_1$  sur  $E_1$  et avec  $f_2$  sur  $E_2$  (c'est-à-dire telle que  $f|_{E_1} = f_1$  et  $f|_{E_2} = f_2$ ).

**Remarque.** On rappelle que si  $f$  est une fonction de  $E$  dans  $F$  et  $A$  une partie de  $E$ , la restriction de  $f$  à  $A$ , notée  $f|_A$ , est l'application  $f|_A$  définie sur  $A$  par  $\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$ .

**Remarque.** On peut donc définir une application linéaire  $f$  séparément sur  $E_1$  et sur  $E_2$ .

## 2 Théorème du rang

**Proposition 2.1** (Forme géométrique du théorème du rang)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  dans  $E$ , alors la restriction de  $f$  à  $S$  (càd  $f|_S$ ) est un isomorphisme de  $S$  dans  $\text{Im}(f)$ .

**Remarque.** Il n'est pas nécessaire de supposer  $E$  ou  $F$  de dimension finie.

**Proposition 2.2** (Théorème du rang)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On suppose que  $E$  est de dimension finie, alors  $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ , c'est-à-dire  $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$ .

**Remarque.** Le fait que  $E$  soit de dimension finie garantit que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  le seront aussi.

**Exercice 5.** Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire  $u$  définie de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u((x, y, z, t)) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

### 3 Équations linéaires

#### Définition 3.1 (Équation linéaire, équation homogène associée)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On appelle **équation linéaire** toute équation d'inconnue  $x \in E$  qu'on peut mettre sous la forme  $f(x) = b$ , où  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $b \in F$ .  
L'équation  $f(x) = 0_F$  est appelée **équation homogène** associée.

**Remarque.** Les solutions de l'équation homogène sont les vecteurs de  $\text{Ker}(f)$ .

#### Proposition 3.2 (Forme de l'ensemble des solutions)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $b \in F$ . On note  $S = \{x \in E | f(x) = b\}$ . Alors :

- Soit  $S$  est vide.
- Soit il existe une solution particulière  $x_P \in E$ , et alors  $S = \{x_P + x_H | x_H \in \text{Ker}(f)\}$ .

**Remarque.** Autrement dit, si  $S$  est non vide, les solutions sont les vecteurs de  $E$  qui s'écrivent comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

**Remarque.** Attention,  $S$  n'est pas nécessairement un espace vectoriel (il ne contient pas toujours  $0_E$ ).

**Exemple.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on pose  $E = C^1(I, \mathbb{K})$  et  $F = C^0(I, \mathbb{K})$ . Soit  $a$  une fonction continue sur  $I$ , on pose  $f$  l'application de  $E$  dans  $F$  définie par  $f : y \mapsto y' + ay$ .

C'est une application linéaire. Pour tout  $b \in F$ , l'équation linéaire  $f(y) = b$  correspond à l'équation différentielle  $y' + a(t)y = b(t)$ , dont on connaissait déjà la structure des solutions.

**Exemple.** On pose  $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  et  $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on pose  $f$  l'application de  $E$  dans  $F$  définie par  $f : X \mapsto AX$ .

C'est une application linéaire. Pour tout  $B \in F$ , l'équation linéaire  $f(X) = B$  correspond au système  $AX = B$ . Cela signifie que si on trouve une solution particulière d'un système linéaire, on peut ensuite se contenter de rechercher les solutions du système homogène associé pour déterminer l'ensemble des solutions.

**Exercice 6.** Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles. En se ramenant à une équation linéaire, déterminer les suites  $u \in E$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$ .

**Exercice 7.** Déterminer tous les  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(2) = 1$  et  $P'(2) = -1$ .

### 4 Formes linéaires et hyperplans

#### Définition 4.1 (Forme linéaire)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

**Exemple.** Soit  $C$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$ . L'application  $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$  est une forme linéaire sur  $C$ .

#### Définition 4.2 (Hyperplan)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de  $E$  tout noyau d'une forme linéaire non nulle de  $E$ .

**Remarque.** Le noyau d'une forme linéaire nulle serait  $E$  tout entier.

**Remarque.** Si  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\varphi$  une forme linéaire sur  $E$  non nulle. Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ , on a alors :  $x \in \text{Ker}(\varphi) \iff \varphi(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = 0$ , où les  $\varphi(e_i)$  ne sont pas tous nuls. Dans ce contexte, un hyperplan est donc un ensemble décrit par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées  $x_i$ .

**Exemple.** Les hyperplans de  $\mathbb{R}^2$  sont les droites passant par l'origine (d'équation  $ax + by = 0$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ), ceux de  $\mathbb{R}^3$  sont les plans passant par l'origine (d'équation  $ax + by + cz = 0$ , avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ).

**Exercice 8.** Soit  $f$  la forme linéaire définie par :  $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = P(0)$ . Déterminer l'hyperplan qui correspond à son noyau et déterminer l'équation linéaire sur les coordonnées qui le caractérise.

**Proposition 4.3** (Supplémentaires d'un hyperplan)

Soit  $E$  un espace vectoriel. Si  $H$  est un hyperplan de  $E$  et  $D$  une droite vectorielle non contenue dans  $H$ , alors  $E = H \oplus D$ .

**Remarque.** Si  $E$  est de dimension finie, on obtient  $\dim(E) = \dim(H) + \dim(D)$ , et donc  $\dim(H) = \dim(E) - 1$ .

**Remarque.** Une telle droite existera toujours, puisque  $H$  est le noyau d'une forme linéaire  $\varphi$  **non nulle** : il suffit de choisir  $v \notin \text{Ker}(\varphi)$  et de poser  $D = \text{Vect}(v)$ .