

Exercice 1 (★). On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

- Caractériser chacun des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ suivants par l'image d'une base (bien choisie, pour que l'expression des images soit la plus simple possible). Aucune justification n'est demandée.
 - la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.
 - la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite d'équation $y = x$.
 - la symétrie centrale.
 - la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.
 - la symétrie axiale, d'axe la droite d'équation $y = -x$.
 - l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.
 - la rotation par rapport à l'origine, d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- On pose $F_1 = \text{Vect}((1, 0))$, $F_2 = \text{Vect}((0, 1))$, $F_3 = \text{Vect}((1, 1))$, $F_4 = \text{Vect}((-1, 1))$.
Caractériser les applications linéaires des questions (a), (b), (c), (d) et (e) par leurs restrictions sur des sous-espaces vectoriels parmi les F_i .

Exercice 2 (★). Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P(X)) = (P(-1), P(0), P(1)).$$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 (★). Soit u la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u((x, y, z)) = (x + z, y - 2x, x + 3z).$$

Montrer que u est un automorphisme.

Exercice 4 (★).

- Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
- Soit g une application linéaire injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
- Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

Exercice 5 (★). Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 3y, -x + y + 2z, y - z) \end{array}$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
- En déduire le rang de φ .
- Déterminer une base de $\text{Im}(\varphi)$.

Exercice 6 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) + P(0) \end{array}$. Montrer que φ est bien définie et linéaire, puis qu'il s'agit d'un automorphisme.

Exercice 7 (★★). Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$f(P(X)) = P(X) + (1 - X)P'(X).$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 8 (★★). Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et a un vecteur non nul de E . On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{id}_E$.

- Montrer que f est un automorphisme.
- Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre. Dans la suite, on pose $G_a = \text{Vect}(a, f(a))$.
- Montrer que G_a est stable par f (c-à-d que $\forall x \in G_a, f(x) \in G_a$).
- Montrer que si un sous-espace vectoriel F stable par f contient a , alors $G_a \subset F$.
- Si $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'endomorphisme f qui vérifie l'hypothèse de l'énoncé.

Exercice 9 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u, v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient $u \circ v = 0$. Montrer que $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$. En déduire que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$.

Exercice 10 (★★★). Soit f l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est une application linéaire définie de E dans E .
2. Pour $k \leq n$, calculer $f(X^k)$. En déduire $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et le rang de f .
3. Soit Q un polynôme de $\text{Im}(f)$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de E tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 11 (★). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = 2$ et $P(-1) = 3$.

Exercice 12 (★). Déterminer toutes les suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n - 8$.

Exercice 13 (★★). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) = X.P'(X) + 1$.

Exercice 14 (★★). Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par $f(P(X)) = \int_0^1 P(t)dt$.

1. Vérifier que f est une forme linéaire, et déterminer $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 15 (Type DS). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n+1}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & (n+1)P(X) - XP'(X) \end{array}$.

1. Montrer que φ est bien définie.
Indication : introduire un polynôme dont on explicitera les coefficients.
2. Montrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
4. Déterminer le rang de φ . En déduire que φ est surjective.
5. Résoudre l'équation $(n+1)P(X) = XP'(X) + X$, d'inconnue $P(X) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.