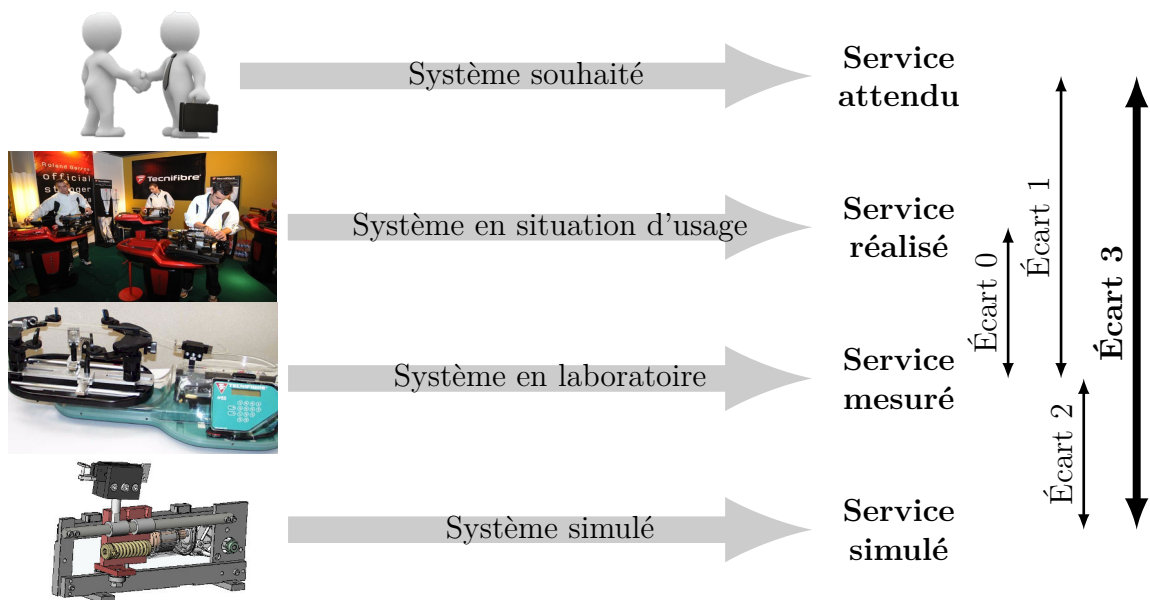


# Modélisation et étude des équilibres statiques

— *Éléments de correction des TDs* —



**Écart 0** – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

**Écart 1** – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

**Écart 2** – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

**Écart 3** – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

*Activités de TD*

## Exercices

Exercice 1 – Système élévateur de rack.....	3
Exercice 2 – Boîtier de direction.....	6
Exercice 3 – Pèse-lettre.....	10
Exercice 4 – Glissière de cellule d’injection plastique.....	14
Exercice 5 – Borne escamotable.....	17
Exercice 6 – Chasse-neige.....	21
Exercice 7 – Excavatrice.....	27
Exercice 8 – Métier à tisser.....	33
Exercice 9 – Robot nettoyeur de piscine.....	37
Exercice 10 – Banc de test moteurs.....	40

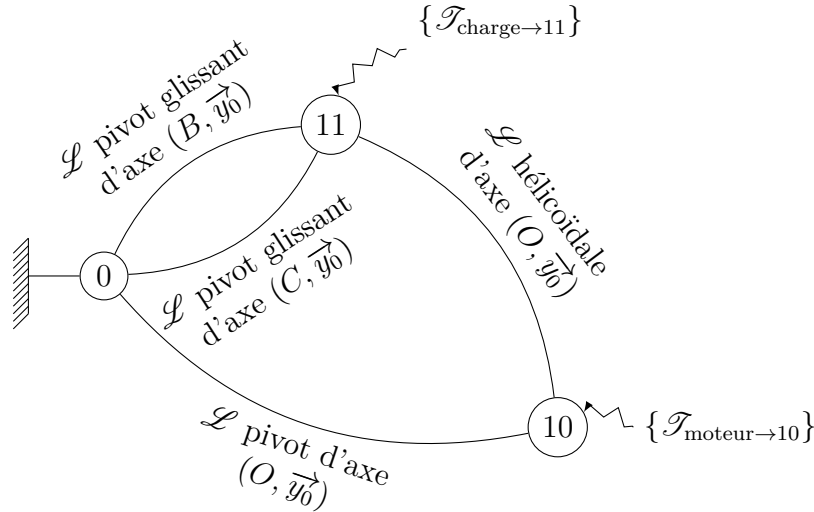


Nicolas Mesnier, lycée international Jean Perrin, Lyon  
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI  
<https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin>

— Version du 4 mai 2026 —

## Système élévateur de rack

**Question 1.1.** D'après le schéma cinématique et les actions mécaniques donnés, il vient le graphe de structure suivant :



**Question 1.2.** Par cours, il vient les expressions canoniques des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons :

— liaison pivot d'axe  $(O, \vec{y}_0)$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} X_0 \vec{x}_0 + Y_0 \vec{y}_0 + Z_0 \vec{z}_0 \\ L_0 \vec{x}_0 + N_0 \vec{z}_0 \end{Bmatrix}}$$

— liaison pivot glissant d'axe  $(B, \vec{y}_0)$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} = \underset{B}{\begin{Bmatrix} X_B \vec{x}_0 + Z_B \vec{z}_0 \\ L_B \vec{x}_0 + N_B \vec{z}_0 \end{Bmatrix}}$$

— liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{y}_0)$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\} = \underset{C}{\begin{Bmatrix} X_C \vec{x}_0 + Z_C \vec{z}_0 \\ L_C \vec{x}_0 + N_C \vec{z}_0 \end{Bmatrix}}$$

— liaison hélicoïdale d'axe  $(O, \vec{y}_0)$  et de pas  $p$  à droite :

$$\{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 11}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} X \vec{x}_0 + Y \vec{y}_0 + Z \vec{z}_0 \\ L \vec{x}_0 - \frac{p}{2\pi} Y \vec{y}_0 + N \vec{z}_0 \end{Bmatrix}}$$

vérifiant bien  $\dim(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 11}\})) = 5$ .

**Question 1.3.** Par changement de point, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} &= \overrightarrow{M_{B,0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} \wedge \overrightarrow{BO} \\ &= L_B \vec{x}_0 + N_B \vec{z}_0 + (X_B \vec{x}_0 + Z_B \vec{z}_0) \wedge (a \vec{x}_0 - \mu \vec{y}_0) \\ &= (L_B + \mu Z_B) \vec{x}_0 + a Z_B \vec{y}_0 + (N_B - \mu X_B) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

d'où

$$\left\{ \mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X_B \vec{x}_0 + Z_B \vec{z}_0 \\ (L_B + \mu Z_B) \vec{x}_0 + a Z_B \vec{y}_0 + (N_B - \mu X_B) \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$$

Par une démarche identique et sachant  $\overrightarrow{CO} = -a \vec{x}_0 - \mu \vec{y}_0$ , procédant aux changements de variables

$$B \rightarrow C \quad \text{et} \quad a \rightarrow -a$$

il vient :

$$\left\{ \mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X_C \vec{x}_0 + Z_C \vec{z}_0 \\ (L_C + \mu Z_C) \vec{x}_0 - a Z_C \vec{y}_0 + (N_C - \mu X_C) \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$$

Avant de poursuivre, on peut remarquer que  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}$  est caractéristique d'une liaison glissière de direction  $\vec{y}_0$  avec

$$\dim \left( \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) = \dim \left( \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \cup \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) = 5$$

tel que le degré d'hyperstatisme soit

$$\begin{aligned} h &= \dim \left( \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \right) + \dim \left( \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) - \dim \left( \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \cup \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) \\ &= \dim \left( \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \cap \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) = 3 \end{aligned}$$

et corresponde au nombre de paramètres géométriques à fixer pour s'assurer que les deux droites affines, axes des liaisons pivot glissant, soient parallèles et non confondues.

**Question 1.4.** Pour déterminer une expression de  $C_m$  en fonction de  $P$  on peut :

1. isoler **10** et écrire l'équation de moment autour de la droite  $(O, \vec{y}_0)$ , c'est-à-dire selon la mobilité en rotation permise par la liaison pivot  $\mathcal{L}_{0-10}$ , de laquelle on tire une expression du type  $C_m = f(Y)$ ;
2. isoler **11** et écrire l'équation de résultante dans la direction  $\vec{y}_0$ , c'est-à-dire selon les mobilités en translation permises par les deux liaisons pivot glissant d'axes parallèles, de laquelle on tire une expression du type  $Y = g(P)$ ;
3. par composition des résultats, on tire une expression du type

$$C_m = f \circ g(P)$$

Mise en œuvre de la stratégie :

1. On isole **10** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique. En particulier, l'équation de moment autour de l'axe  $(O, \vec{y}_0)$  donne :

$$/ (O, \vec{y}_0) : \quad \underbrace{\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 10}} \cdot \vec{y}_0}_{0 \text{ (pivot } \mathcal{L}_{0-10})} + \overrightarrow{M_{O,11 \rightarrow 10}} \cdot \vec{y}_0 + C_m = 0$$

Avec, par théorème d'actions réciproques

$$\overrightarrow{M_{O,11 \rightarrow 10}} \cdot \vec{y}_0 = -\overrightarrow{M_{O,10 \rightarrow 11}} \cdot \vec{y}_0 = \frac{p}{2\pi} Y$$

il vient

$$C_m + \frac{p}{2\pi} Y = 0 \iff \boxed{C_m = \frac{-p}{2\pi} Y}$$

2. On isole **11** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique. En particulier, l'équation de résultante dans la direction  $\vec{y}_0$  donne :

$$/ \vec{y}_0 : \quad \underbrace{\overrightarrow{F_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} \cdot \vec{y}_0}_0 + \underbrace{\overrightarrow{F_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}} \cdot \vec{y}_0}_0 + \overrightarrow{F_{10 \rightarrow 11}} \cdot \vec{y}_0 - P = 0$$

il vient

$$\boxed{Y = P}$$

3. Par substitution, il vient finalement :

$$\boxed{C_m = \frac{-p}{2\pi} P}$$

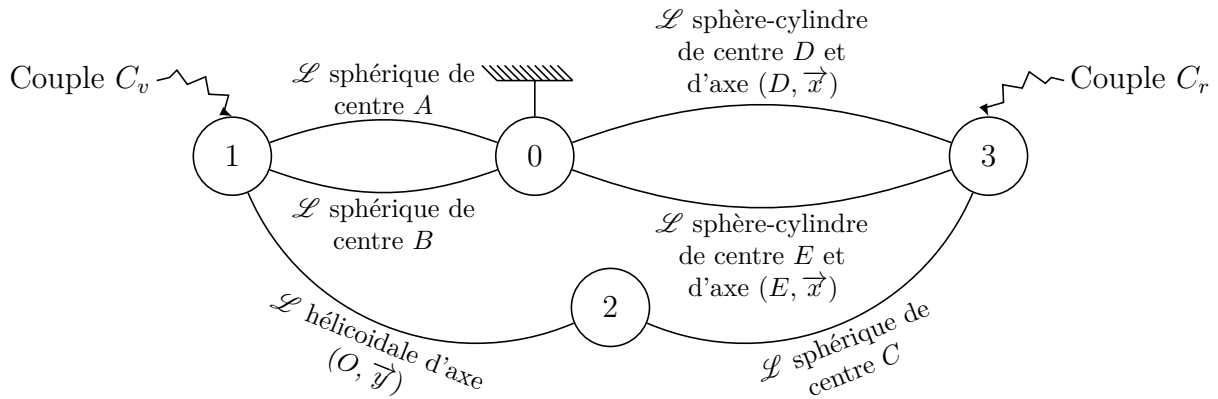
**Question 1.5.** Avec  $p = 2\pi \text{ mm} = 2\pi \times 10^{-3} \text{ m}$  et  $P = 100 \text{ N}$ , il vient :

$$\boxed{C_m = -0,1 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

— EXERCICE 2 —

## Boîtier de direction

**Question 2.1.** D'après le schéma cinématique et les actions mécaniques donnés, il vient le graphe de structure suivant :



**Question 2.2.** 1. On isole **1** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen. Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre  $A$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\} = \begin{Bmatrix} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

— liaison sphérique de centre  $B$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}}\} = \begin{Bmatrix} X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

— liaison hélicoïdale d'axe  $(O, \vec{y})$  et de pas réduit  $p^* = p/(2\pi)$  à droite :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} - p^* Y_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

— couple d'entrée

$$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_v \vec{y} \end{Bmatrix}_*$$

On applique le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_v \vec{y} \end{Bmatrix}_* = \{0\}$$

L'équation de résultante, en projection dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  donne :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : & \quad 0 = X_A + X_B + X_{21} \\ / \vec{y} : & \quad 0 = Y_A + Y_B + Y_{21} \\ / \vec{z} : & \quad 0 = Z_A + Z_B + Z_{21} \end{aligned}$$

Par changement de point, il vient en  $O$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{\text{A}}} &= \overrightarrow{M_{A,0 \rightarrow 1}^{\text{A}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}^{\text{A}}} \wedge \overrightarrow{AO} \\ &= (X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z}) \wedge -y_A \vec{y} \\ &= y_A (Z_A \vec{x} - X_A \vec{z}) \end{aligned}$$

et de façon similaire, avec le changement de variable  $A \rightarrow B$ , il vient :

$$\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{\text{B}}} = y_B (Z_B \vec{x} - X_B \vec{z})$$

d'où l'équation de moment au point  $O$  en projection dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\begin{aligned} /(O, \vec{x}) : & \quad 0 = y_A Z_A + y_B Z_B + L_{21} \\ /(O, \vec{y}) : & \quad \boxed{0 = C_v - p^* Y_{21}} \\ /(O, \vec{z}) : & \quad 0 = -y_A X_A - y_B X_B + N_{21} \end{aligned}$$

2. On isole **2** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen. Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre  $C$  :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} X_C \vec{x} + Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_C \vec{x} + Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z} \\ x_C (-Z_C \vec{y} + Y_C \vec{z}) \end{array} \right\}_O$$

obtenu par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,3 \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M_{C,3 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{CO} \\ &= (X_C \vec{x} + Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z}) \wedge -x_C \vec{x} \\ &= x_C (-Z_C \vec{y} + Y_C \vec{z}) \end{aligned}$$

— liaison hélicoïdale d'axe  $(O, \vec{y})$  et de pas réduit  $p^* = p/(2\pi)$  à droite :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} -X_{21} \vec{x} - Y_{21} \vec{y} - Z_{21} \vec{z} \\ -L_{21} \vec{x} + p^* Y_{21} \vec{y} - N_{21} \vec{z} \end{array} \right\}$$

On applique le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

L'équation de résultante, en projection dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  donne :

$$\begin{aligned} /_{\vec{x}} : & \quad 0 = X_C - X_{21} \\ /_{\vec{y}} : & \quad 0 = \boxed{Y_C - Y_{21}} \\ /_{\vec{z}} : & \quad 0 = Z_C - Z_{21} \end{aligned}$$

L'équation de moment au point  $C$  en projection dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\begin{aligned} /(C, \vec{x}) : & \quad 0 = -L_{21} \\ /(C, \vec{y}) : & \quad 0 = -x_C Z_C + p^* Y_{21} \\ /(C, \vec{z}) : & \quad 0 = x_C Y_C - N_{21} \end{aligned}$$

3. On isole **3** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen. Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre  $C$  :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -X_C \vec{x} - Y_C \vec{y} - Z_C \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison sphère-cylindre de centre  $D$  et d'axe  $(D, \vec{x})$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{D}}\}_D = \left\{ \begin{array}{c} Y_D \vec{y} + Z_D \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison sphère-cylindre de centre  $E$  et d'axe  $(E, \vec{x})$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{E}}\}_E = \left\{ \begin{array}{c} Y_E \vec{y} + Z_E \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— couple de sortie

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{x} \end{array} \right\}_*$$

On applique le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{D}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{E}}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{x} \end{array} \right\}_* = \{0\}$$

L'équation de résultante, en projection dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  donne :

$$\begin{aligned} /_{\vec{x}} : & \quad 0 = -X_C \\ /_{\vec{y}} : & \quad 0 = -Y_C + Y_D + Y_E \\ /_{\vec{z}} : & \quad 0 = -Z_C + Z_D + Z_E \end{aligned}$$

Par changement de point, il vient en  $D$  :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{D,0\rightarrow 3}^{\textcircled{E}} &= \overrightarrow{M}_{E,0\rightarrow 3}^{\textcircled{E}} + \overrightarrow{F}_{0\rightarrow 3}^{\textcircled{E}} \wedge \overrightarrow{ED} \\
&= (Y_E \overrightarrow{y} + Z_E \overrightarrow{z}) \wedge (x_D - x_E) \overrightarrow{x} \\
&= (x_D - x_E) (Z_E \overrightarrow{y} - Y_E \overrightarrow{z}) \\
\overrightarrow{M}_{D,2\rightarrow 3} &= \overrightarrow{M}_{C,2\rightarrow 3} + \overrightarrow{F}_{2\rightarrow 3} \wedge \overrightarrow{CD} \\
&= -(X_C \overrightarrow{x} + Y_C \overrightarrow{y} + Z_C \overrightarrow{z}) \wedge [(x_D - x_C) \overrightarrow{x} + k \overrightarrow{z}] \\
&= -kY_C \overrightarrow{x} + (kX_C - (x_D - x_C)Z_C) \overrightarrow{y} + (x_D - x_C)Y_C \overrightarrow{z}
\end{aligned}$$

d'où l'équation de moment au point  $D$  en projection dans la base  $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$  :

$$\begin{aligned}
/(D, \overrightarrow{x}) : & \quad \boxed{0 = -kY_C + C_r} \\
/(D, \overrightarrow{y}) : & \quad 0 = (x_D - x_E)Z_E + kX_C - (x_D - x_C)Z_C \\
/(D, \overrightarrow{z}) : & \quad 0 = -(x_D - x_E)Y_E + (x_D - x_C)Y_C
\end{aligned}$$

**Question 2.3.** À partir des 3 équations mises en évidence, c'est-à-dire :

— pour **1** isolé, équation de moment autour de l'axe  $(O, \overrightarrow{y})$

$$C_v = p^* Y_{21}$$

— pour **2** isolé, équation de résultante dans la direction  $\overrightarrow{y}$

$$Y_C = Y_{21}$$

— pour **3** isolé, équation de moment autour de l'axe  $(D, \overrightarrow{x})$

$$C_r = kY_C$$

puis par simples substitutions successives, il vient

$$\boxed{C_r = \frac{k}{p^*} C_v}$$

Des 15 autres équations, on tire les inconnues d'actions mécaniques effectivement transmises par les liaisons, non demandées.

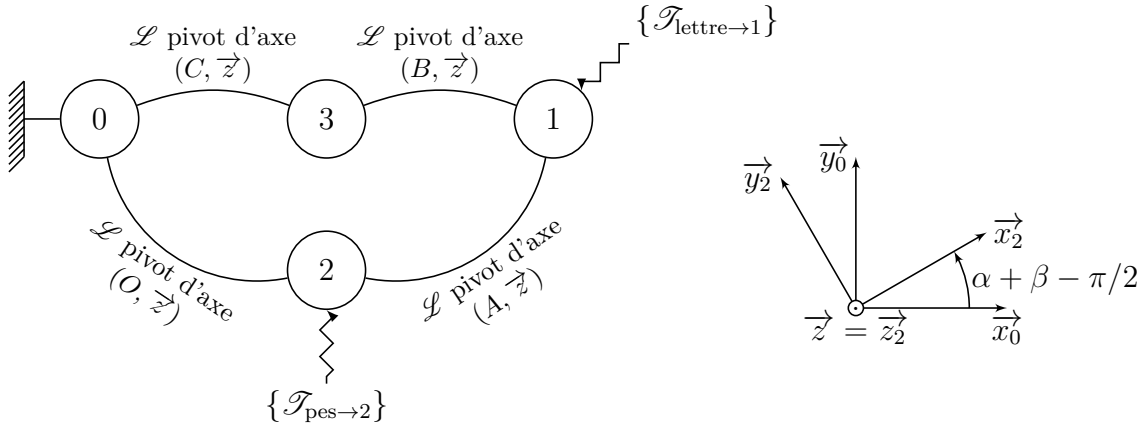
**Question 2.4.** Pour trouver le plus rapidement possible une relation entre  $C_r$  et  $C_v$ , il est nécessaire d'exploiter les mobilités des liaisons. En particulier, il est nécessaire de remarquer que c'est la translation de **2** par rapport à **1** dans la direction  $\overrightarrow{y}$  qui induit la rotation de **3** par rapport à **0** autour de la droite  $(DE)$ , translation elle-même induite, par l'intermédiaire de la liaison hélicoïdale, par la rotation de **1** par rapport à **0** autour de la droite  $(AB)$ . Avec ces éléments, il est clair qu'il faut :

- isoler **1** : équation de moment autour de l'axe  $(O, \overrightarrow{y})$ , associée à la rotation autour de  $(AB)$  ;
- isoler **2** : équation de résultante dans la direction  $\overrightarrow{y}$ , associée à la translation dans la direction  $\overrightarrow{y}$  ;
- isoler **3** : équation de moment autour de l'axe  $(D, \overrightarrow{x})$ , associé à la rotation autour de  $(DE)$ .

— EXERCICE 3 —

## Pèse-lettre

**Question 3.1.** D'après le schéma cinématique et les actions mécaniques donnés, il vient le graphe de structure suivant :



**Question 3.2.** Par une démarche de résolution systématique, sachant que l'on a :

- 3 solides hors bâti ;
- 6 équations d'équilibre par solide en résolution spatiale ;

soit **18 équations** par produit et

- 4 liaisons pivot ;
- avec chacune 5 inconnues d'actions mécaniques transmissibles ;

soit **20 inconnues**, il vient que le rang du système doit vérifier

$$\text{rang} \leq \min(\text{nb équations}, \text{nb inconnues}) = 18 < \text{nb inconnues} = 20$$

Donc on ne peut pas résoudre sans faire d'hypothèse sur au moins 2 inconnues. Par contre, en faisant une résolution plane, dans un plan de normale  $\vec{z}_0$ , c'est-à-dire en n'écrivant que l'équation de résultante dans les directions  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  et l'équation de moment autour d'un axe parallèle à  $\vec{z}_0$ , alors les liaisons pivot se limitent à des glisseurs avec 2 inconnues chacune. Il vient alors que le rang du système doit vérifier

$$\text{rang} \leq \min(\text{nb équations}, \text{nb inconnues}) = 8 < \text{nb équations} = 9$$

donc il semble possible de résoudre.

**Question 3.3.** On procède à une **résolution plane** dans un plan de normale  $\vec{z}_0$ . On identifie que **3** est soumis à deux glisseurs. Par théorème, il vient que l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 3}\}$  est la droite  $(BC) = (B, \vec{x}_2)$  telle que, par théorème d'actions réciproques on ait :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_3 \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

On isole **1**.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$  :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} F_3 \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— poids des lettres, supposant  $G_1 \in (A, \vec{y}_0)$

$$\{\mathcal{T}_{\text{lettres} \rightarrow 1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

**1** est en équilibre dans un référentiel galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{\text{lettres} \rightarrow 1}\} = \{0\}$$

Sachant que

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 = \cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 = \sin\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha + \beta)$$

et choisissant le point  $A$  pour l'équation de moment, il vient par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{A,3 \rightarrow 1}} &= \overrightarrow{M_{B,3 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{BA} \\ &= F_3 \vec{x}_2 \wedge b \vec{y}_0 \\ &= b F_3 \sin(\alpha + \beta) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

d'où on tire les trois équations :

$$\begin{aligned} / \vec{x}_0 : & \quad 0 = X_A + F_3 \sin(\alpha + \beta) \\ / \vec{y}_0 : & \quad 0 = Y_A - m_1 g - F_3 \cos(\alpha + \beta) \\ / (A, \vec{z}_0) : & \quad 0 = b F_3 \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

On en déduit que pour toute configuration, c'est-à-dire  $\alpha + \beta$  quelconque :

$$\begin{cases} 0 = X_A + F_3 \sin(\alpha + \beta) \\ 0 = Y_A - m_1 g - F_3 \cos(\alpha + \beta) \\ 0 = b F_3 \sin(\alpha + \beta) \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = m_1 g \\ F_3 = 0 \end{cases}}$$

On note que l'effort  $F_3$  est nul tant que  $G_1 \in (A, \vec{y}_0)$ . Dès que la distance du point  $G_1$  à la droite  $(A, \vec{y}_0)$  est non nulle, l'action du poids des lettres induit un moment autour de l'axe  $(A, \vec{z}_0)$  qui doit être compensé par l'action de la barre **3** telle que l'on ait

$$bF_3 \sin(\alpha + \beta) + m_1 g \overrightarrow{G_1 A} \cdot \vec{x}_0 = 0 \iff F_3 = \frac{m_1 g}{b} \overrightarrow{AG_1} \cdot \vec{x}_0$$

On isole **2**.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 2}\} = \underset{B}{\begin{pmatrix} X_O \vec{x}_0 + Y_O \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}}$$

— liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$ , par théorème d'actions réciproques

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = -\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \underset{A}{\begin{pmatrix} -X_A \vec{x}_0 - Y_A \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}}$$

— pesanteur sur la masse en  $G_2$

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 2}\} = \underset{G_2}{\begin{pmatrix} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}}$$

**2** est en équilibre dans un référentiel galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

Choisissant le point  $O$  pour l'équation de moment, il vient par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{AO} \\ &= \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{OA} \\ &= (X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0) \wedge -a \vec{x}_2 \\ &= a [X_A \cos(\alpha + \beta) + Y_A \sin(\alpha + \beta)] \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M_{O,\text{pes} \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M_{G_2,\text{pes} \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{\text{pes} \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{G_2 O} \\ &= -m_2 g \vec{y}_0 \wedge L (\cos(\alpha) \vec{y}_0 - \sin(\alpha) \vec{x}_0) \\ &= -m_2 g L \sin(\alpha) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

d'où on tire les trois équations :

$$\begin{aligned} / \vec{x}_0 : & \quad 0 = X_O - X_A \\ / \vec{y}_0 : & \quad 0 = Y_O - Y_A - m_2 g \\ / (O, \vec{z}_0) : & \quad 0 = a [X_A \cos(\alpha + \beta) + Y_A \sin(\alpha + \beta)] - m_2 g L \sin(\alpha) \end{aligned}$$

En tenant compte des expressions trouvées à la suite de l'isolement de **1**, il vient :

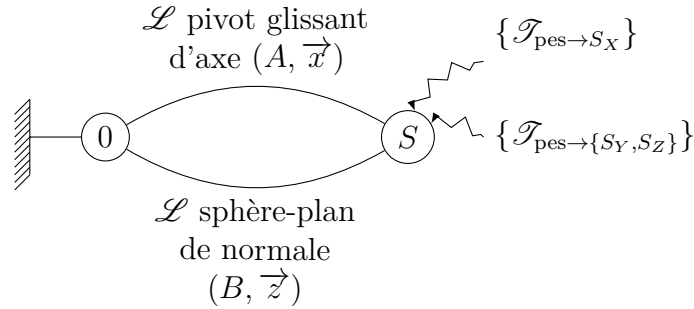
$$\begin{cases} X_O = 0 \\ Y_O = (m_1 + m_2) g \\ 0 = am_1 g \sin(\alpha + \beta) - m_2 g L \sin(\alpha) \end{cases}$$

d'où on tire, pour tout  $\alpha + \beta \neq 0 [\pi]$ , l'expression :

$$m_1 = \left( \frac{L \sin(\alpha)}{a \sin(\alpha + \beta)} \right) m_2$$

## Glissière de cellule d'injection plastique

**Question 4.1.** D'après les données du sujet, il vient le graphe de structure suivant :



**Question 4.2.** On isole l'ensemble  $S$ . Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{x})$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{A}}\} = \begin{Bmatrix} Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ M_A \vec{y} + N_A \vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

— liaison sphère-plan de normale  $(B, \vec{z})$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}\} = \begin{Bmatrix} Z_B \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

— action de la pesanteur sur le module  $S_X$  :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S_X}\} = \begin{Bmatrix} -M_X g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_X}$$

— action de la pesanteur sur l'ensemble mobile  $\{S_Y, S_Z\}$  :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \{S_Y, S_Z\}}\} = \begin{Bmatrix} -M_{YZ} g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_{YZ}}$$

**Question 4.3.**  $S = \{S_X, S_Y, S_Z\}$  est en équilibre dans un référentiel galiléen. On lui applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{A}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S_X}\} + \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \{S_Y, S_Z\}}\} = \{0\}$$

Équation de résultante :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : & 0 = 0 \\ / \vec{y} : & 0 = Y_A \\ / \vec{z} : & 0 = Z_A + Z_B - (M_X + M_{YZ}) g \end{aligned}$$

Pour écrire l'équation de moment au point  $A$ , on exprime par changement de point les moments au point  $A$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{A,0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}} &= \overrightarrow{M_{B,0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}} \wedge \overrightarrow{BA} \\ &= Z_B \overrightarrow{z} \wedge E \overrightarrow{y} \\ &= -EZ_B \overrightarrow{x}\end{aligned}$$

Procédant aux simples changements de variables  $Z_B \rightarrow -M_X g$  et  $E \rightarrow a$  et  $Z_B \rightarrow -M_{YZ} g$  et  $E \rightarrow -CY$ , il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{A,\text{pes} \rightarrow S_X}} &= aM_X g \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{M_{A,\text{pes} \rightarrow \{S_Y, S_Z\}}} &= -CY M_{YZ} g \overrightarrow{x}\end{aligned}$$

d'où l'équation de moment au point  $A$  :

$$\begin{aligned}/(A, \overrightarrow{x}) : & 0 = -EZ_B + aM_X g - CY M_{YZ} g \\ / (A, \overrightarrow{y}) : & 0 = M_A \\ / (A, \overrightarrow{z}) : & 0 = N_A\end{aligned}$$

Avec l'équation de moment autour de l'axe  $(A, \overrightarrow{x})$ , on trouve :

$$Z_B = g \frac{aM_X - CY M_{YZ}}{E} \implies \boxed{\left\{ \mathcal{F}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} g \frac{aM_X - CY M_{YZ}}{E} \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}}$$

Exploitant ce résultat dans l'équation de résultante dans la direction  $\overrightarrow{z}$ , il vient :

$$Z_A = g \left[ \left(1 - \frac{a}{E}\right) M_X + \left(1 + \frac{CY}{E}\right) M_{YZ} \right]$$

d'où

$$\boxed{\left\{ \mathcal{F}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{A}} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} g \left[ \left(1 - \frac{a}{E}\right) M_X + \left(1 + \frac{CY}{E}\right) M_{YZ} \right] \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}}$$

**Question 4.4.** Le sens de l'effort exercé par la liaison sphère-plan dépend du signe de  $Z_B$ . Comme  $g$  et  $E$  sont positifs, il vient par application numérique :

$$aM_X - CY M_{YZ} = 0,2 \times 230 - 0,5 \times 120 = 46 - 60 = -14 \implies Z_B < 0$$

qui signifie que l'action de la liaison sphère-plan est dirigée vers le bas, selon  $-\overrightarrow{z}$ .

**Question 4.5.** Comme nous avons isolé  $S$ , l'action du rail  $\mathbf{0}$  est transmise par le galet  $\mathbf{9}$  si, et seulement si, son action est dirigée vers le bas, selon  $-\overrightarrow{z}$ , qui correspond à

$$Z_B < 0 \iff aM_X - CY M_{YZ} < 0 \iff \boxed{CY > a \frac{M_X}{M_{YZ}}}$$

et que l'on traduit en condition sur la position du centre de gravité de l'ensemble mobile  $\{S_Y, S_Z\}$ .

**Question 4.6.** Par application numérique, on a :

$$Z_B = \frac{g}{E} (aM_X - CYM_{YZ}) = \frac{9,81}{0,5} \times -14 \approx 274,7 \text{ N}$$

## Borne escamotable

### 5.1 Analyse fonctionnelle et structurelle

**Question 5.1.** Les solutions constructives choisies sont :

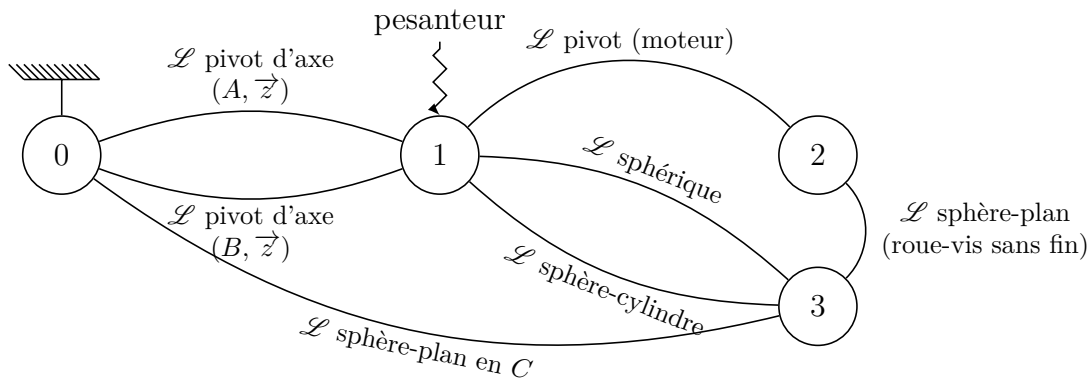
- des cellules photovoltaïques pour transformer l'énergie solaire en énergie électrique ;
- une batterie pour stocker l'énergie ;
- un motoréducteur pour convertir l'énergie électrique en énergie mécanique ;
- un système roue-vis sans fin pour réduire la vitesse de rotation et rendre le système irréversible (afin de soutenir le poids de la borne sans apport d'énergie) ;
- un système pignon-crémaillère pour adapter le mouvement de rotation en translation de la borne ;
- deux colonnes de guidage pour guider la borne.

**Question 5.2.** Le limiteur de couple permet de stopper la montée de la borne lorsque un obstacle se présente afin de préserver le système lui-même, notamment en limitant le courant moteur. Le limiteur permet aussi d'éviter des dégradations sur l'obstacle lui-même, qui peut être une voiture par exemple.

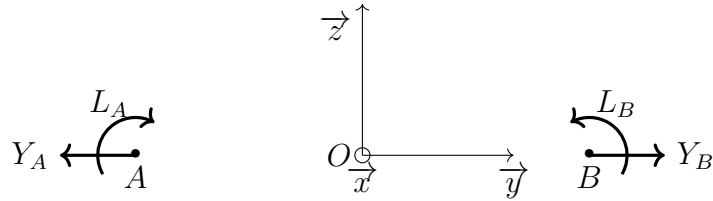
**Question 5.3.** Le guidage du chariot supportant la borne est modélisé par deux liaisons pivots glissants d'axes parallèles et non confondus. La dimension du sous-espace vectoriel engendré par chacun des torseurs d'actions mécaniques transmissibles est de 4, soit 8 par somme. Sachant que la liaison équivalente est une liaison glissière de direction  $\vec{z}$ , dont la dimension du sous-espace vectoriel engendré par son torseur d'actions mécaniques transmissibles est de 5, il vient que le degré d'hyperstatisme vaut  $h = 3$  ce qui représente un problème pour une étude statique.

### 5.2 Étude statique

**Question 5.4.** D'après le schéma cinématique et les actions mécaniques donnés, il vient le graphe de structure suivant :



**Question 5.5.** Par symétrie des deux liaisons pivot d'axes parallèles par rapport au plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ , on a :



d'où, tenant compte des frottements dans la translation de direction  $\vec{z}$ , on tire :

$$X_A = X_B, \quad Y_A = -Y_B, \quad Z_A = Z_B, \quad L_A = -L_B, \quad M_A = M_B, \quad N_A = N_B = 0$$

**Question 5.6.** On isole  $E = \{1, 2, 3\}$ . Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{z})$  en tenant compte de la résistance induite par le frottement dans la direction  $\vec{z}$  :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\} = \underset{A}{\begin{pmatrix} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ L_A \vec{x} + M_A \vec{y} \end{pmatrix}}$$

— liaison pivot glissant d'axe  $(B, \vec{z})$ , incluant la symétrie et les actions de frottement :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}}\} = \underset{B}{\begin{pmatrix} X_A \vec{x} - Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ -L_A \vec{x} + M_A \vec{y} \end{pmatrix}}$$

— liaison sphère-plan (pignon-crémaillère) :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\} = \underset{C}{\begin{pmatrix} X_{0 \rightarrow 3} \vec{x} + Z_{0 \rightarrow 3} \vec{z} \\ \vec{0} \end{pmatrix}}$$

— action de la pesanteur :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 1}\} = \underset{G}{\begin{pmatrix} -mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{pmatrix}}$$

**Question 5.7.** Le contact pignon-crémaillère peut être modélisé par une liaison sphère-plan de normale la droite de pression dessinée sur la figure 5.2. Notant  $F_{03}$  l'effort dans cette direction, vient par projection :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\} = \underset{C}{\begin{pmatrix} F_{03} (\cos(\alpha) \vec{z} - \sin(\alpha) \vec{x}) \\ \vec{0} \end{pmatrix}}$$

d'où la forme du torseur donnée.

**Question 5.8.** En phase de montée, on a

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ v \vec{z} \end{array} \right\}, \quad v > 0$$

D'après les lois de Coulomb, on :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{A,1/0} \wedge \vec{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}} &= \vec{0} \\ \vec{V}_{A,1/0} \cdot \vec{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}} &\leq 0 \\ \|\vec{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\| &= f \|\vec{N}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\| \end{aligned}$$

d'où :

$$Z_A = -f \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} < 0, \quad f = \tan(\varphi)$$

L'ensemble  $E$  est en équilibre dans un référentiel galiléen. On lui applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}\} + \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 1}\} = \{0\}$$

Équation de résultante :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : \quad 0 &= 2X_A - F_{03} \sin(\alpha) \\ / \vec{y} : \quad 0 &= 0 \\ / \vec{z} : \quad 0 &= -2f \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} + F_{03} \cos(\alpha) - mg \end{aligned}$$

Pour écrire l'équation de moment au point  $O$ , on exprime par changement de point les moments au point  $O$  :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}} &= \vec{M}_{A,0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}} + \vec{F}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}} \wedge \vec{AO} \\ &= L_A \vec{x} + M_A \vec{y} + (X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z}) \wedge \frac{h}{2} \vec{y} \\ &= L_A \vec{x} + M_A \vec{y} + \frac{h}{2} (X_A \vec{z} - Z_A \vec{x}) \end{aligned}$$

Procédant aux changements de variables  $h \rightarrow -h$ ,  $Y_A \rightarrow -Y_A$ , il vient

$$\vec{M}_{O,0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}} = -L_A \vec{x} + M_A \vec{y} - \frac{h}{2} (X_A \vec{z} - Z_A \vec{x})$$

De même, par changement de point, il vient aussi :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,O \rightarrow 3} &= \vec{M}_{C,O \rightarrow 3} + \vec{F}_{0 \rightarrow 3} \wedge \vec{CO} \\ &= F_{03} (\cos(\alpha) \vec{z} - \sin(\alpha) \vec{x}) \wedge -\ell \vec{z} \\ &= -\ell F_{03} \sin(\alpha) \vec{y} \\ \vec{M}_{O,\text{pes} \rightarrow 1} &= \vec{M}_{G,\text{pes} \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{pes} \rightarrow 1} \wedge \vec{GO} \\ &= -mg \vec{z} \wedge -(d \vec{x} + L \vec{z}) \\ &= mgd \vec{y} \end{aligned}$$

d'où l'équation de moment au point  $O$  :

$$\begin{aligned} /(\vec{O}, \vec{x}) : 0 &= 0 \\ /(\vec{O}, \vec{y}) : 0 &= 2M_A - \ell F_{03} \sin(\alpha) + mgd \\ /(\vec{O}, \vec{z}) : 0 &= 0 \end{aligned}$$

Supposant  $Y_A = 0 \text{ N}$  et  $L_A = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$ , il vient :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : 0 &= 2X_A - F_{03} \sin(\alpha) \\ / \vec{z} : 0 &= -2f |X_A| + F_{03} \cos(\alpha) - mg \\ /(\vec{O}, \vec{y}) : 0 &= 2M_A - \ell F_{03} \sin(\alpha) + mgd \end{aligned}$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A = \frac{\sin(\alpha)}{2} F_{03} \\ F_{03} = \frac{mg}{\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)} \\ M_A = \frac{mg}{2} \left( \frac{\ell \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)} - d \right) \end{array} \right. \iff \boxed{\left\{ \begin{array}{l} X_A = \frac{mg \sin(\alpha)}{2 (\cos(\alpha) - f \sin(\alpha))} \\ F_{03} = \frac{mg}{\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)} \\ M_A = \frac{mg}{2} \left( \frac{\ell \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)} - d \right) \end{array} \right.}$$

**Question 5.9.** La seule composante de moment non nulle est  $M_A$ , autour des axes  $(A, \vec{y})$  et  $(B, \vec{y})$ .

**Question 5.10.** Pour avoir un moment nul, il faut

$$M_A = 0 \iff \frac{\ell \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)} - d = 0 \iff \boxed{d = \left( \frac{\tan(\alpha)}{1 - f \tan(\alpha)} \right) \ell}$$

**Question 5.11.** Par application numérique avec  $\ell = 60 \text{ mm}$ ,  $f = 0,22$  et  $\alpha = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ , il vient :

$$d = \frac{\tan(\alpha)}{1 - f \tan(\alpha)} \ell \approx 23,74 \text{ mm}$$



— l'action de la liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z})$  avec le cadre **1** (glisseur en  $D$ )  $\times D$

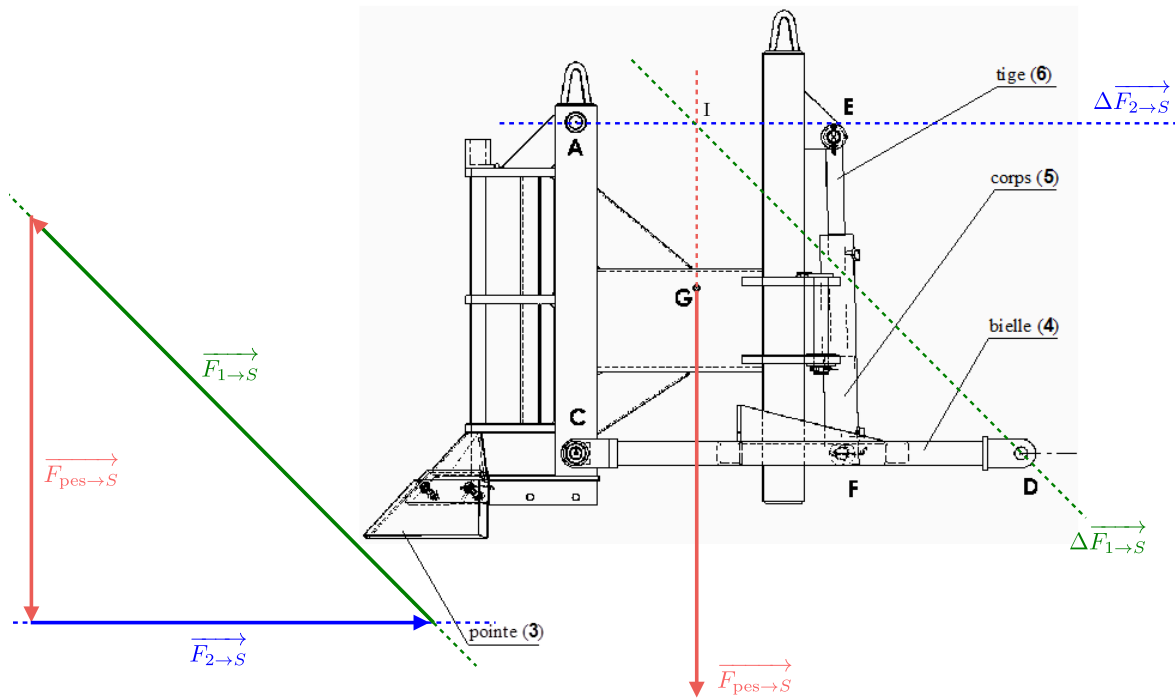
**Question 6.6.** Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de  $\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow S}\}$  sont sécants au point  $I$ , alors les 3 axes centraux le sont en ce point; ce qui permet de déterminer l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow S}\}$  comme la droite  $(DI)$ . Au point  $I$ , il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{\text{pes} \rightarrow S}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{2 \rightarrow S}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow S}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\overrightarrow{F_{\text{pes} \rightarrow S}} + \overrightarrow{F_{2 \rightarrow S}} + \overrightarrow{F_{1 \rightarrow S}} = \vec{0}$$

qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes :



On a  $\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 4}} = \overrightarrow{F_{1 \rightarrow S}}$  et on lit

$$\|\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 4}}\| = 11\,880 \text{ N}$$

**Question 6.7.** Sachant que dans cette configuration, on a  $\vec{x}_1 \cdot \vec{y} = 0$ , d'où  $\vec{y} = \vec{y}_1$ , alors on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 4}} \cdot \vec{x}_1 = -\overrightarrow{F_{2 \rightarrow S}} \cdot \vec{x}_1 = -8\,300 \text{ N} \\ \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 4}} \cdot \vec{y}_1 = -\overrightarrow{F_{\text{pes} \rightarrow S}} \cdot \vec{y}_1 = 8\,500 \text{ N} \end{cases}$$

d'où

$$\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 4}} = -8300\vec{x}_1 + 8500\vec{y}_1$$

**Question 6.8.** Commençons par isoler l'ensemble  $\{5,6, \text{huile}\}$  soumis à deux glisseurs. Par théorème, on en déduit que l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{6 \rightarrow 4}\}$  est la droite  $(FE) = (F, \vec{y})$ .

On isole **4** soumis à 3 actions mécaniques :

— l'action du cadre **1** (connue) :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 4}\} = \underset{D}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 4}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— l'action de la liaison sphérique de centre  $F$  avec la tige **6** (recherchée) :

$$\{\mathcal{T}_{6 \rightarrow 4}\} = \underset{F}{\left\{ \begin{array}{c} F_{64} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— l'action de la liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z})$  avec la pointe **3** (glisseur en  $C$ , non cherchée).

Par équation de moment en  $C$ , il vient :

$$\overrightarrow{M_{C,1 \rightarrow 4}} + \overrightarrow{M_{C,6 \rightarrow 4}} = \vec{0}$$

Avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{C,1 \rightarrow 4}} &= \overrightarrow{M_{D,1 \rightarrow 4}} + \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 4}} \wedge \overrightarrow{DC} \\ &= (-8300\vec{x}_1 + 8500\vec{y}_1) \wedge -1070\vec{x}_1 \\ &= 9\,095 \times 10^3 \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{C,6 \rightarrow 4}} &= \overrightarrow{M_{F,6 \rightarrow 4}} + \overrightarrow{F_{6 \rightarrow 4}} \wedge \overrightarrow{FC} \\ &= F_{64} \vec{y}_1 \wedge -630\vec{x}_1 \\ &= 630 F_{64} \vec{z} \end{aligned}$$

d'où

$$9\,095 \times 10^3 + 630 F_{64} = 0 \iff F_{64} = -\frac{9\,095 \times 10^3}{630} = -14\,436,50 \text{ N}$$

**Question 6.9.** Il est indiqué sur l'image CAO de l'annexe que le vérin de relevage a comme référence 704/4 de type  $\varnothing A/B = 40/70$ . L'effort développé avec une pression  $p = 15 \text{ MPa} = 150 \text{ bar}$  en traction (rentrée de tige) vaut  $40 \text{ kN} \gg 15 \text{ kN}$ .

**Question 6.10.** Avec une pression  $p = 15 \text{ MPa} = 150 \text{ bar}$ , pour générer un effort  $F \geq 15 \text{ kN}$ , il faut une surface

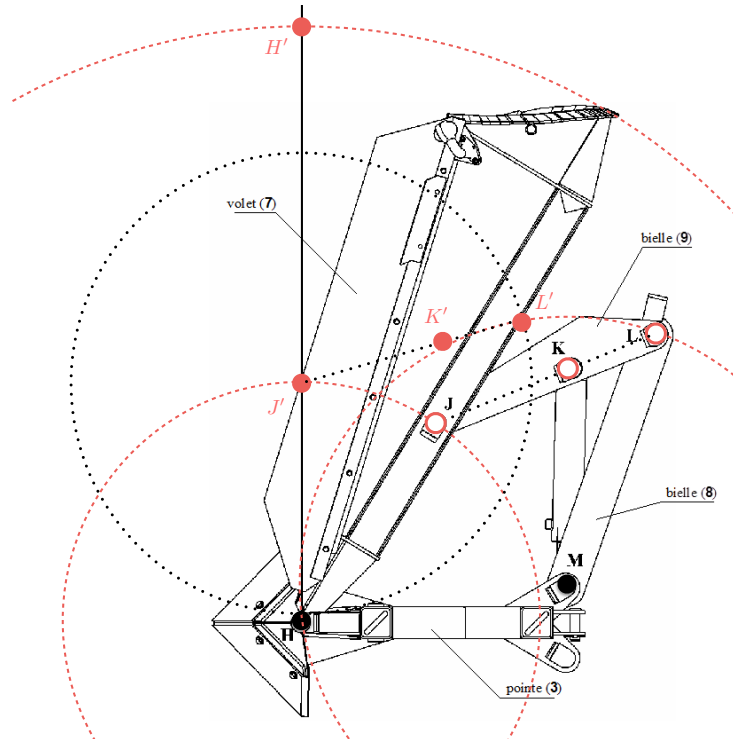
$$S \geq \frac{F}{p} = \frac{15 \times 10^3}{15} = 1\,000 \text{ mm}^2$$

Comme l'action de  $\overrightarrow{F_{6 \rightarrow 4}}$  est dirigée vers le bas (négative), le vérin travaille en traction (rentrée de tige) avec une surface annulaire comprise entre un diamètre  $A$  et un diamètre  $B$ . D'après les courbes données en annexe, un vérin 30/50, de surface  $1\,256 \text{ mm}^2$ , convient, donc *a fortiori* le vérin 40/70 choisi.

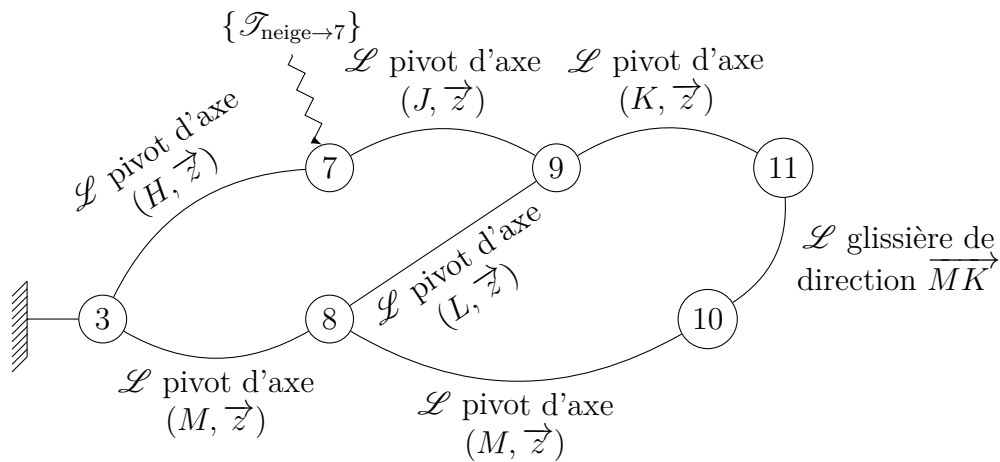
## 6.2 Validation du fonctionnement en position « lame »

**Question 6.11.** Le point  $J \in 7$  décrit dans le repère du bâti **1** un arc de cercle de centre  $H$  et de rayon  $HJ$ . On place le point  $J'$  à l'intersection de cet arc de cercle avec la verticale telle que  $\alpha = 0$ .

Le point  $L \in 8$  décrit dans le repère du bâti **1** un arc de cercle de centre  $M$  et de rayon  $ML$ . On reporte ensuite la longueur  $JL$  depuis le point  $J'$  pour trouver, par intersection des deux cercles, la position du point  $L'$  compatible avec celle du point  $K \in [JL]$ , telle que  $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{J'K'} \cdot \overrightarrow{J'L'}$ .





**Question 6.12.** D'après le schéma cinématique, il vient le graphe de structure :



On suppose le problème plan (dans un plan de normale  $\vec{z}$ ). Pour élaborer une stratégie pour déterminer l'effort développé par le vérin, commençons par faire l'inventaire des solides et ensembles de solides soumis à 2 et 3 glisseurs :

- solides soumis à 2 glisseurs :  $\emptyset$  ;
- ensemble de solides soumis à 2 glisseurs :  $\{10, 11, \text{huile}\}$  et  $\{8, 9, 10, 11\}$  ;
- solides soumis à 3 glisseurs : 7, 8 et 9 ;
- ensemble de solides soumis à 3 glisseurs : ...

Par théorème d'un solide  $\{10, 11, \text{huile}\}$  soumis à 2 glisseurs, l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 9}\}$  est la droite  $(MK)$ . Par théorème d'un solide  $\{8, 9, 10, 11\}$  soumis à 2 glisseurs, l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{7 \rightarrow 9}\}$  est la droite  $(MJ)$ . Ainsi, en isolant **7**, on a :

- l'action de la neige (connue) ; 
- l'action de **9** (axe central connu) ;   $(MJ)$
- action de la liaison pivot avec **3** (glisseur au point  $H$ ).  $\times H$

Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de  $\{\mathcal{T}_{\text{neige} \rightarrow 7}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{9 \rightarrow 7}\}$  sont sécants au point  $I$ , alors les 3 axes centraux le sont en ce point ; ce qui permet de déterminer l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 7}\}$  comme la droite  $(HI)$ . Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point  $I$  on a :



$${}_I \begin{Bmatrix} 2 \times 10^4 \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_I \begin{Bmatrix} \vec{F}_{9 \rightarrow 7} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_I \begin{Bmatrix} \vec{F}_{3 \rightarrow 7} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$2 \times 10^4 \vec{x}_3 + \vec{F}_{9 \rightarrow 7} + \vec{F}_{3 \rightarrow 7} = \vec{0}$$

qui se traduit par un triangle.

Ensuite, en isolant **9**, on a :

- l'action de **7** (connue) ; 
- l'action de **11** (axe central connu) ;   $(MK)$
- action de la liaison pivot avec **8** (glisseur au point  $L$ ).  $\times L$

Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de  $\{\mathcal{T}_{7 \rightarrow 9}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 7}\}$  sont sécants au point  $M$ , alors les 3 axes centraux le sont en ce point ; ce qui permet de déterminer l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{8 \rightarrow 9}\}$  comme la droite  $(ML)$ . Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point  $M$  on a :

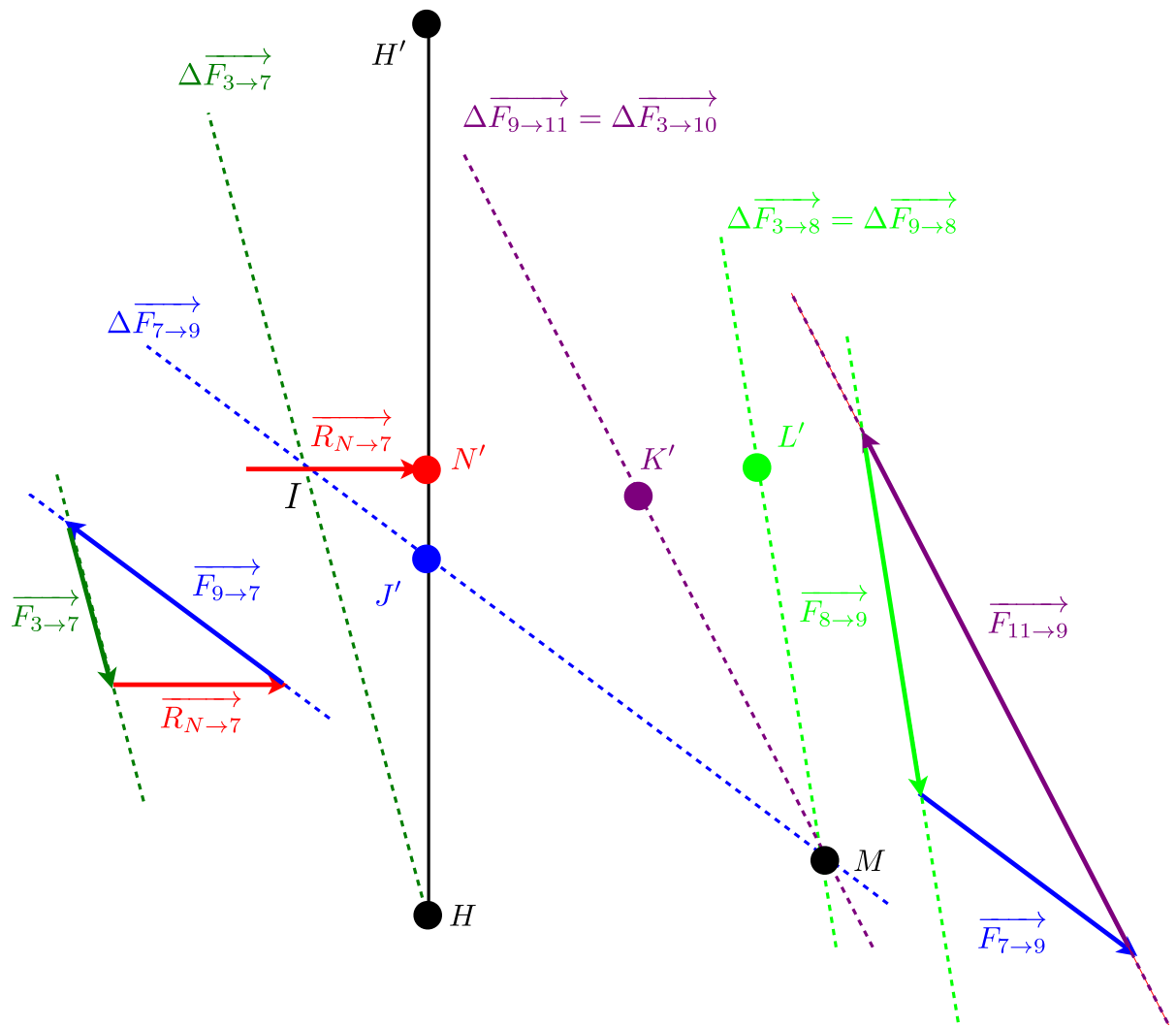
$${}_M \begin{Bmatrix} \vec{F}_{7 \rightarrow 9} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_M \begin{Bmatrix} \vec{F}_{11 \rightarrow 7} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_M \begin{Bmatrix} \vec{F}_{8 \rightarrow 9} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\vec{F}_{7 \rightarrow 9} + \vec{F}_{11 \rightarrow 7} + \vec{F}_{8 \rightarrow 9} = \vec{0}$$

qui se traduit par un triangle.

Il vient alors les constructions suivantes.



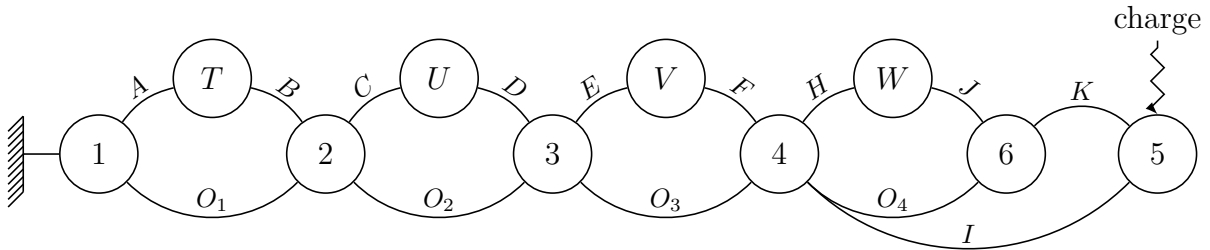
— EXERCICE 7 —

## Excavatrice



Ces éléments de corrigé sont rédigés pour une seule configuration géométrique ; leur transposition à l'autre étant supposée évidente.

**Question 7.1.** Le mécanisme pouvant être représenté dans un plan de normale notée  $\vec{z}$ , on procède à une étude plane telle que chaque liaison pivot d'axe  $(\square, \vec{z})$  soit simplement notée  $\square$  sur le graphe de structure.

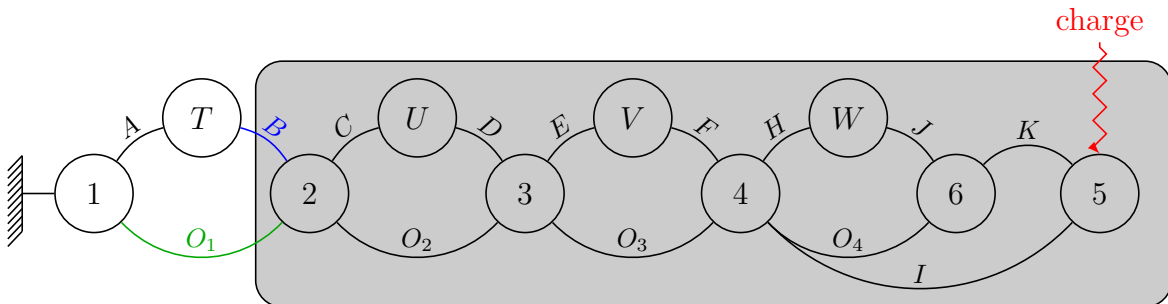


Notant que les vérins  $T$ ,  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont chacun soumis à 2 glisseurs, il vient par théorème d'un solide soumis à deux glisseurs que les axes centraux des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les vérins sont :

- $T : \Delta \overrightarrow{F_{T \rightarrow 2}} = (AB)$  ;
- $U : \Delta \overrightarrow{F_{U \rightarrow 3}} = (CD)$  ;
- $V : \Delta \overrightarrow{F_{V \rightarrow 4}} = (EF)$  ;
- $W : \Delta \overrightarrow{F_{W \rightarrow 6}} = (GH)$ .

### Action mécanique développée par le vérin $T$

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin  $T$ , on isole l'ensemble  $S_T = \{2, 3, 4, 5, 6, U, V, W\}$  soumis à trois glisseurs :

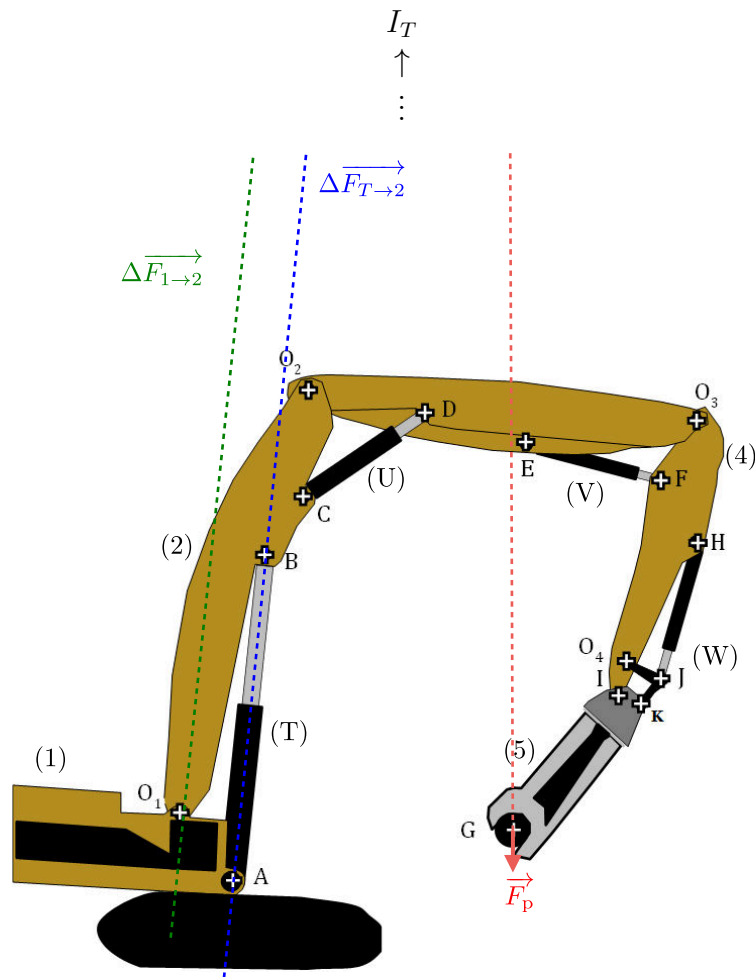


- l'action de la charge (connue) ;
- l'action du vérin  $T$  (axe central connu) ;  $(AB)$
- action de la liaison pivot avec  $\mathbf{1}$  (glisseur au point  $O_1$ ).  $O_1$

Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de  $\{\mathcal{S}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$  et  $\{\mathcal{S}_{T \rightarrow 2}\}$  sont sécants au point  $I_T$ , alors les 3 axes centraux le sont en ce point ; ce qui permet de déterminer l'axe central de  $\{\mathcal{S}_{1 \rightarrow 2}\}$  comme la droite  $(O_1 I_T)$ . Au point  $I_T$ , il vient alors :

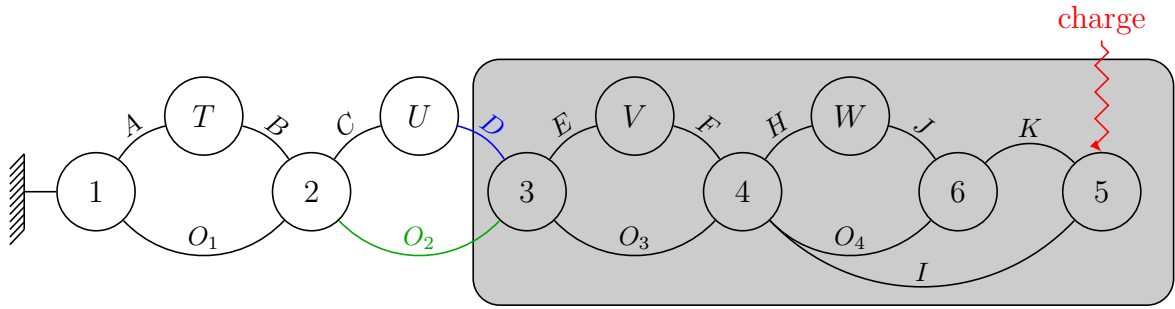
$${}_{I_T} \begin{Bmatrix} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_{I_T} \begin{Bmatrix} \vec{F}_{T \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_{I_T} \begin{Bmatrix} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Malheureusement, le document réponse n'est pas suffisamment grand dans cette configuration pour réaliser la construction.



### Action mécanique développée par le vérin $U$

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin  $U$ , on isole l'ensemble  $S_U = \{3, 4, 5, 6, V, W\}$  soumis à trois glisseurs :



- l'action de la charge (connue); ↗
- l'action du vérin  $U$  (axe central connu); ↗ ( $CD$ )
- action de la liaison pivot avec **2** (glisseur au point  $O_2$ ). ✕  $O_2$

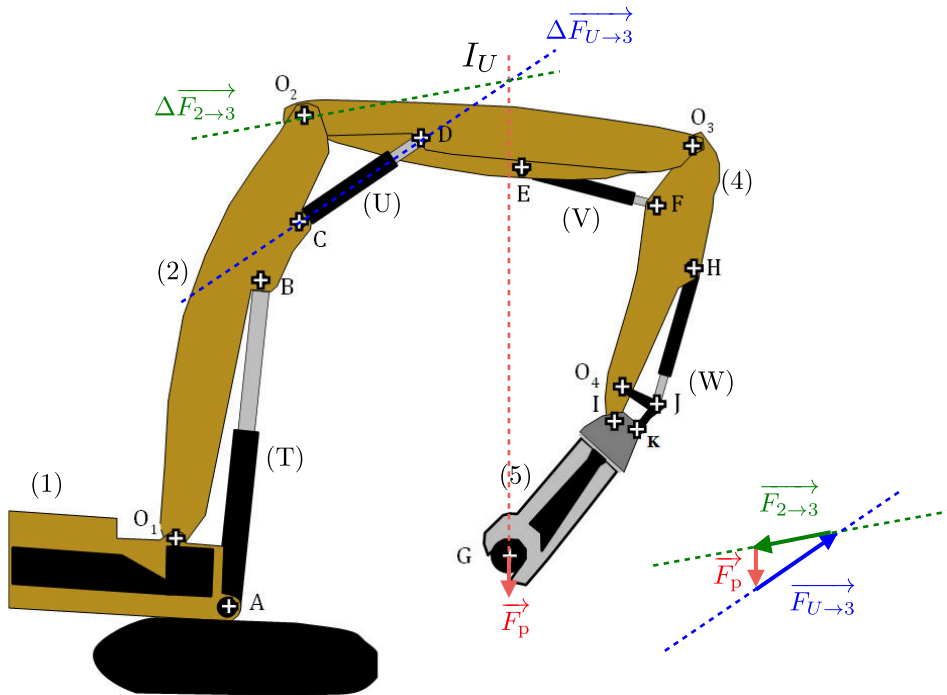
Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de  $\{\mathcal{T}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{U \rightarrow 3}\}$  sont sécants au point  $I_U$ , alors les 3 axes centraux le sont en ce point; ce qui permet de déterminer l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\}$  comme la droite  $(O_2 I_U)$ . Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point  $I_U$  on a :

$$\begin{Bmatrix} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_U} + \begin{Bmatrix} \vec{F}_{U \rightarrow 3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_U} + \begin{Bmatrix} \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_U} = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

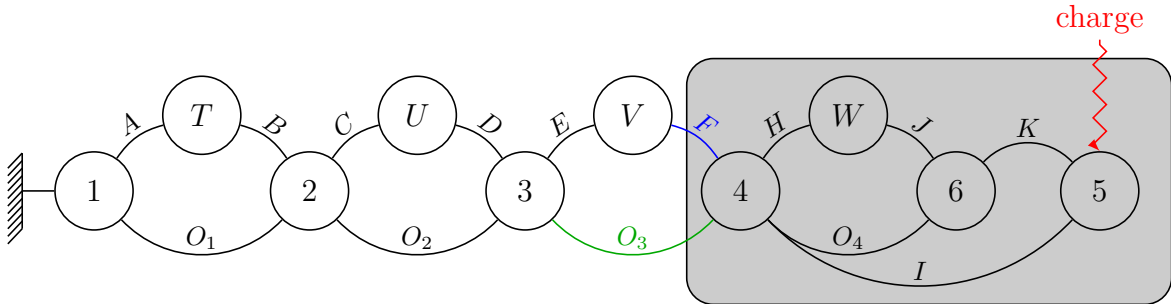
$$\vec{F}_p + \vec{F}_{U \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3} = \vec{0}$$

qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.



## Action mécanique développée par le vérin $V$

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin  $V$ , on isole l'ensemble  $S_V = \{4, 5, 6, W\}$  soumis à trois glisseurs :



- l'action de la charge (connue); ↯
- l'action du vérin  $V$  (axe central connu); ↯ ( $EF$ )
- action de la liaison pivot avec  $2$  (glisseur au point  $O_3$ ). ✕  $O_3$

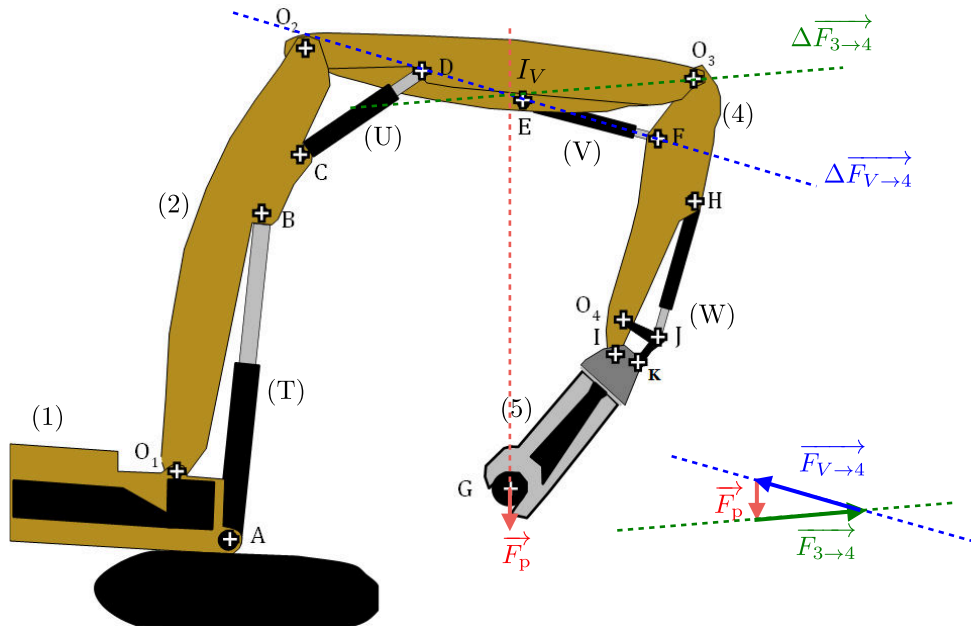
Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de  $\{\mathcal{T}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{V \rightarrow 4}\}$  sont sécants au point  $I_V$ , alors les 3 axes centraux le sont en ce point; ce qui permet de déterminer l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 4}\}$  comme la droite  $(O_3 I_V)$ . Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point  $I_V$  on a :

$$\begin{Bmatrix} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_V} + \begin{Bmatrix} \vec{F}_{V \rightarrow 4} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_V} + \begin{Bmatrix} \vec{F}_{3 \rightarrow 4} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_V} = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{V \rightarrow 4} + \vec{F}_{3 \rightarrow 4} = \vec{0}$$




qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.



## Action mécanique développée par le vérin $W$

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin  $W$ , il est nécessaire de procéder en deux temps :

1. on isole **5** soumis à trois glisseurs :

- l'action de la charge (connue); 
- l'action de **6** (axe central connu);  ( $KJ$ ) (donné dans le sujet)
- action de la liaison pivot avec **4** (glisseur au point  $I$ ). 

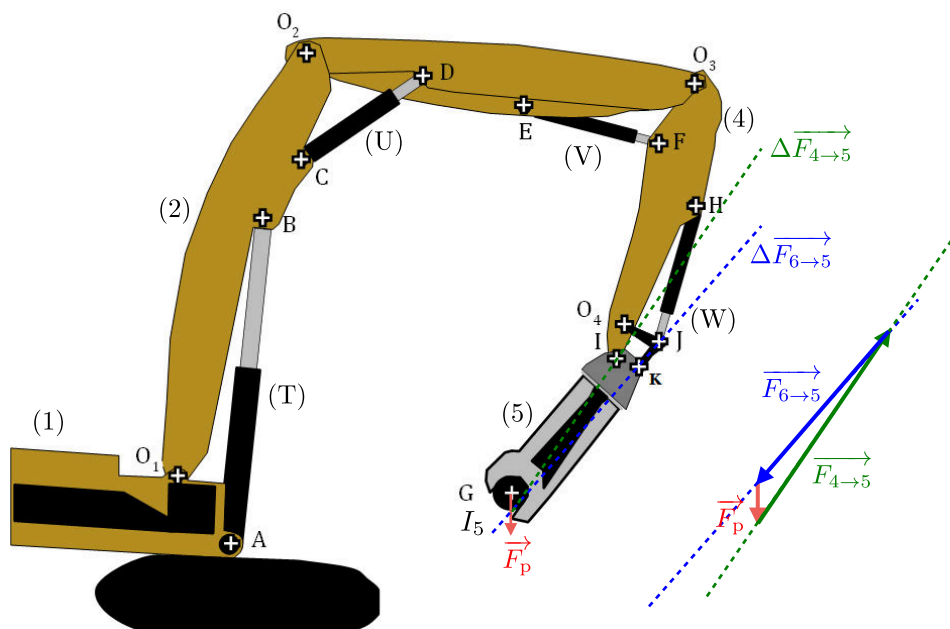
Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de  $\{\mathcal{T}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{6 \rightarrow 5}\}$  sont sécants au point  $I_5$ , alors les 3 axes centraux le sont en ce point; ce qui permet de déterminer l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 5}\}$  comme la droite  $(I_5I)$ . Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point  $I_5$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_5} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{6 \rightarrow 5} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_5} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{4 \rightarrow 5} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_5} = \{0\}$$



il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{6 \rightarrow 5} + \vec{F}_{4 \rightarrow 5} = \vec{0}$$

qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.



2. on isole **6** soumis à trois glisseurs :

- l'action de **5** (connue); 
- l'action du vérin  $W$  (axe central connu);  ( $HJ$ )



## Métier à tisser

**Question 8.1.** On se place dans un plan de normale  $\vec{x}$  et on commence par isoler la roulette **5** soumise à :

- l'action de la liaison sphère-plan de normale  $(CK)$  avec **2** ;
- l'action de la liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x})$  avec le coulisseau **3** ;

qui sont deux glisseurs en  $C$  et en  $K$ . Par théorème, il vient que l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 5}\} = \{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 2}\}$  est la droite  $(CK)$ . Comme la normale extérieure à **5** est  $-\vec{z}_2$ , pour qu'il y ait contact en  $K$  avec **2**, on a forcément

$$\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 5}} \cdot (-\vec{z}_2) \leq 0$$

Comme on a  $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 5}} = \overrightarrow{K_{5 \rightarrow 3}}$ , en posant Sachant de plus que l'on a  $\overrightarrow{K_{5 \rightarrow 3}} = K_{53} \vec{z}_2$ , il vient  $K_{53} > 0$ .

On isole ensuite le coulisseau **3**. Il est soumis à :

- l'action de la liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x})$  avec la roulette **5**

$$\{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{K_{5 \rightarrow 3}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C, \quad \overrightarrow{K_{5 \rightarrow 3}} = K_{53} \vec{z}_2, \quad K_{53} > 0$$

d'axe central  $(CK) = (C, \vec{z}_2)$ .

- l'action des couteaux **6**

$$\{\mathcal{T}_{6 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{Q_{6 \rightarrow 3}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C, \quad \overrightarrow{K_{6 \rightarrow 3}} = Q_{63} \vec{z}_3$$

d'axe central  $(CQ) = (C, \vec{z}_3)$  ;

- les actions de contact avec le bâti **0** aux points  $D$  et  $E$ , respectivement notées

$$\left\{ \mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{D}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{D_{0 \rightarrow 3}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D, \quad \left\{ \mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{E}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{E_{0 \rightarrow 3}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E.$$

Pour déterminer les axes centraux de ces deux actions, on se place à la limite du glissement, en phase de remontée, telle que la vitesse de glissement soit

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/0} \right\}_* = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \vec{z}_3 \end{array} \right\}, \quad V > 0$$

et on pose la décomposition orthogonale

$$\forall \spadesuit \in \{D, E\}, \quad \overrightarrow{\spadesuit_{0 \rightarrow 3}} = \overrightarrow{N_{0 \rightarrow 3}^{\spadesuit}} + \overrightarrow{T_{0 \rightarrow 3}^{\spadesuit}} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{N_{0 \rightarrow 3}^{\spadesuit}} = \left( \overrightarrow{\spadesuit_{0 \rightarrow 3}} \cdot \vec{y}_3 \right) \vec{y}_3.$$

D'après les lois de Coulomb, on a :

$$\forall \spadesuit \in \{D, E\}, \quad \begin{cases} \overrightarrow{T_{0 \rightarrow 3}^{\spadesuit}} \wedge \overrightarrow{V_{\spadesuit, 3/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{T_{0 \rightarrow 3}^{\spadesuit}} \cdot \overrightarrow{V_{\spadesuit, 3/0}} \leq 0 \\ \left\| \overrightarrow{T_{0 \rightarrow 3}^{\spadesuit}} \right\| = f \left\| \overrightarrow{N_{0 \rightarrow 3}^{\spadesuit}} \right\| \end{cases}$$

d'où

$$\forall \spadesuit \in \{D, E\}, \quad \overrightarrow{T_{0 \rightarrow 3}^{\spadesuit}} = \left( \overrightarrow{\spadesuit_{0 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{z_3} \right) \overrightarrow{z_3}, \quad \overrightarrow{\spadesuit_{0 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{z_3} \leq 0$$

Pour déterminer les axes centraux, il est nécessaire de signer les actions normales. Sachant les points  $C, D, E$  alignés sur la droite  $(C, \overrightarrow{z_3})$  et  $\overrightarrow{Q_{6 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{y_3} = 0$ , on trouve :

— par équation de moment en  $D$ , sachant  $\overrightarrow{K_{5 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{y_3} \leq 0$  :


$$\overrightarrow{N_{0 \rightarrow 3}^E} \cdot \overrightarrow{y_3} \leq 0$$

— par équation de moment en  $C$


$$\overrightarrow{N_{0 \rightarrow 3}^D} \cdot \overrightarrow{N_{0 \rightarrow 3}^E} \leq 0 \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{N_{0 \rightarrow 3}^D} \cdot \overrightarrow{y_3} \geq 0.$$




Il vient alors que :

— avec  $\overrightarrow{N_{0 \rightarrow 3}^D} \cdot \overrightarrow{y_3} \geq 0$  et  $\overrightarrow{T_{0 \rightarrow 3}^D} \cdot \overrightarrow{z_3} \leq 0$ , l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^D\}$  est la droite


$(D, \overrightarrow{y_3} - f \overrightarrow{z_3})$ ; 


— avec  $\overrightarrow{N_{0 \rightarrow 3}^E} \cdot \overrightarrow{y_3} \leq 0$  et  $\overrightarrow{T_{0 \rightarrow 3}^E} \cdot \overrightarrow{z_3} \leq 0$ , l'axe central de  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^E\}$  est la droite

$(E, \overrightarrow{y_3} + f \overrightarrow{z_3})$ . 

Notant  $I$  le point d'intersection de ces deux droites, il vient que le torseur  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^D\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^E\}$  est un glisseur au point  $I$ .  =   $\cap$  

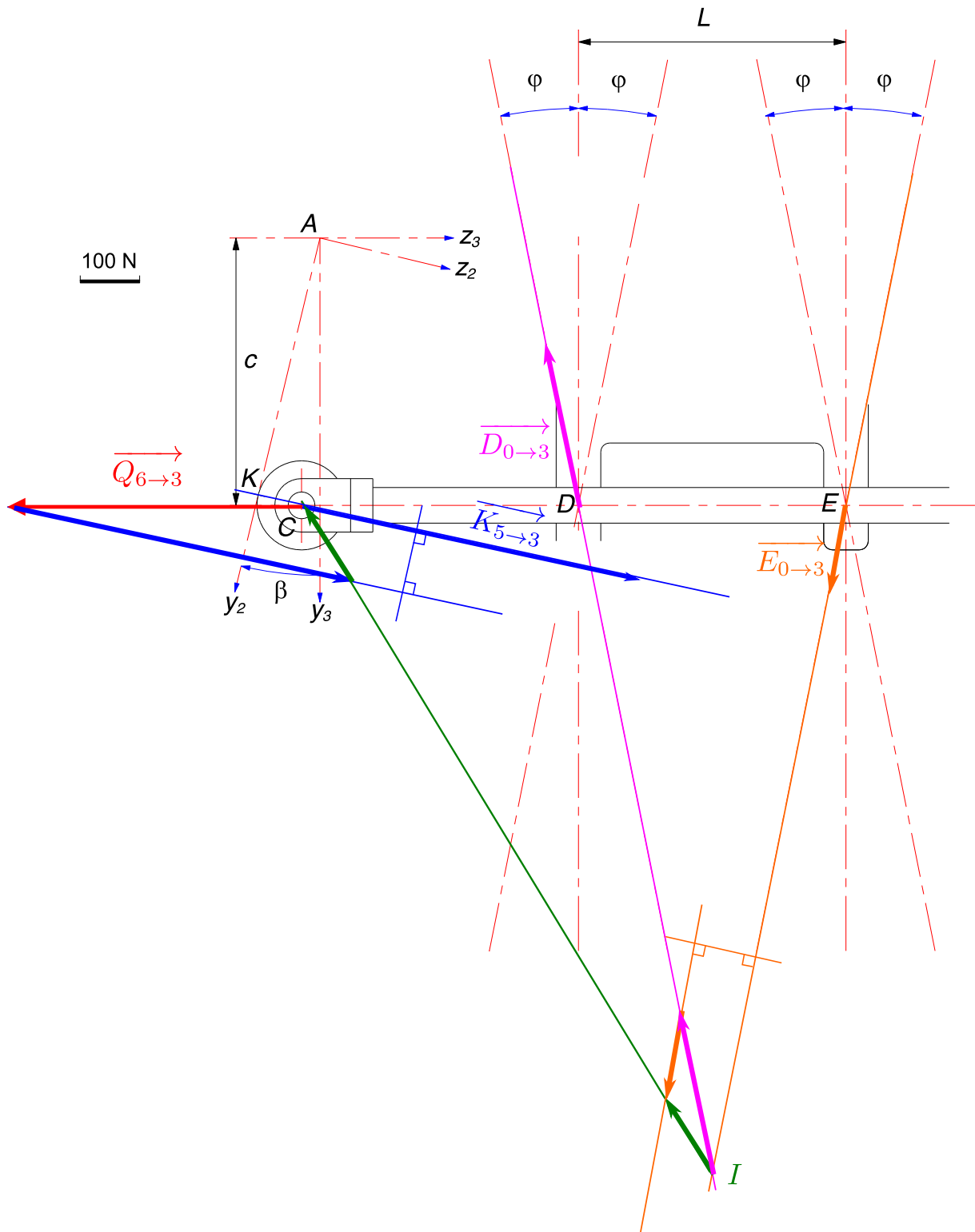
Considérant que le coulisseau **3** est alors soumis à trois glisseurs dont deux

—  $\{\mathcal{T}_{6 \rightarrow 3}\}$  d'axe central  $(C, \overrightarrow{z_3})$  (glisseur connu); 

—  $\{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 3}\}$  d'axe central  $(KC)$  

sont d'axes centraux sécants en  $C$ , il vient par théorème d'un solide soumis à trois glisseurs que l'axe central du torseur  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^D\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^E\}$  est la droite  $(CI)$ . Une fois trouvée, par équilibre au point  $C$ , la résultante  $\overrightarrow{D_{0 \rightarrow 3}} + \overrightarrow{E_{0 \rightarrow 3}}$ , on décompose cette somme en traçant une simple parallèle. Après ces constructions, on trouve :

$$\left\| \overrightarrow{D_{0 \rightarrow 3}} \right\| = 300 \text{ N}, \quad \left\| \overrightarrow{E_{0 \rightarrow 3}} \right\| = 151 \text{ N} \quad \text{et} \quad \left\| \overrightarrow{K_{5 \rightarrow 3}} \right\| = 600 \text{ N}.$$



**Question 8.2.** D'après l'étude menée à la limite du glissement, tant que  $(\overrightarrow{IC'}, \overrightarrow{CL'}) \neq 0 [\pi]$ , c'est-à-dire tant que les droites  $(CK) = (C, \overrightarrow{z_2})$  et  $(IC)$  ne sont pas confondues, il est « possible » de trouver une position d'équilibre. Dans le cas où les axes centraux

de  $\{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 3}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\text{D}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\text{E}}\}$  sont confondus, par construction, il est impossible de trouver une intersection et donc des valeurs d'efforts. Par contre, pour que cette position d'équilibre soit compatible avec les cônes de frottement, il faut forcément que  $\beta \geq 60^\circ$ , pour que l'intersection des axes centraux de  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\text{D}}\}$  et  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\text{E}}\}$  se situe en dessous du point  $I$ . On en déduit donc que tant que  $|\beta| < \beta_{\text{arc}} = 60^\circ$ , il n'y aura pas arc-boutement.

Pour limiter l'arc-boutement, il est possible :

- d'augmenter la longueur de guidage, ici la distance  $DE$  ;
- diminuer le coefficient de frottement  $f$  ;
- limiter l'angle  $\beta$ , par exemple en augmentant la distance  $CA$ .

## Robot nettoyeur de piscine

### 9.1 Étude du déplacement horizontal

**Question 9.1.** Par définition si **41** est le pignon d'entrée et **43** le pignon de sortie, alors on a :

$$r_t = \frac{\omega_{43}}{\omega_{41}} = \left(-\frac{Z_{41}}{Z_{42}}\right) \times \left(-\frac{Z_{42}}{Z_{42}}\right) \times \left(-\frac{Z_{42}}{Z_{43}}\right) = -\frac{Z_{41}}{Z_{43}} = -\frac{24}{42} \approx -0,57$$

**Question 9.2.** En tenant compte du rapport de transmission du réducteur  $r$ , de celui de la transmission  $r_t$  et du rayon des brosses  $R_b$ , on a :

$$|V_c| = R_b \omega_{\text{roue}} = R_b \times r \times r_t \times \omega_m$$

d'où par application numérique :

$$|V_c| = 67,5 \times 10^{-3} \times \frac{1}{22,7} \times 0,57 \times 1815 \cdot \frac{\pi}{30} \approx 0,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

### 9.2 Étude de la montée verticale

**Question 9.3.** On isole le robot. Il est soumis aux actions mécaniques extérieures de :

— la pesanteur

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes}\rightarrow r}\} = \begin{Bmatrix} Mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

— la poussée d'Archimède

$$\{\mathcal{T}_{\text{eau}\rightarrow r}\} = \begin{Bmatrix} -P_A \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

— la force d'aspiration, supposée négligeable ;

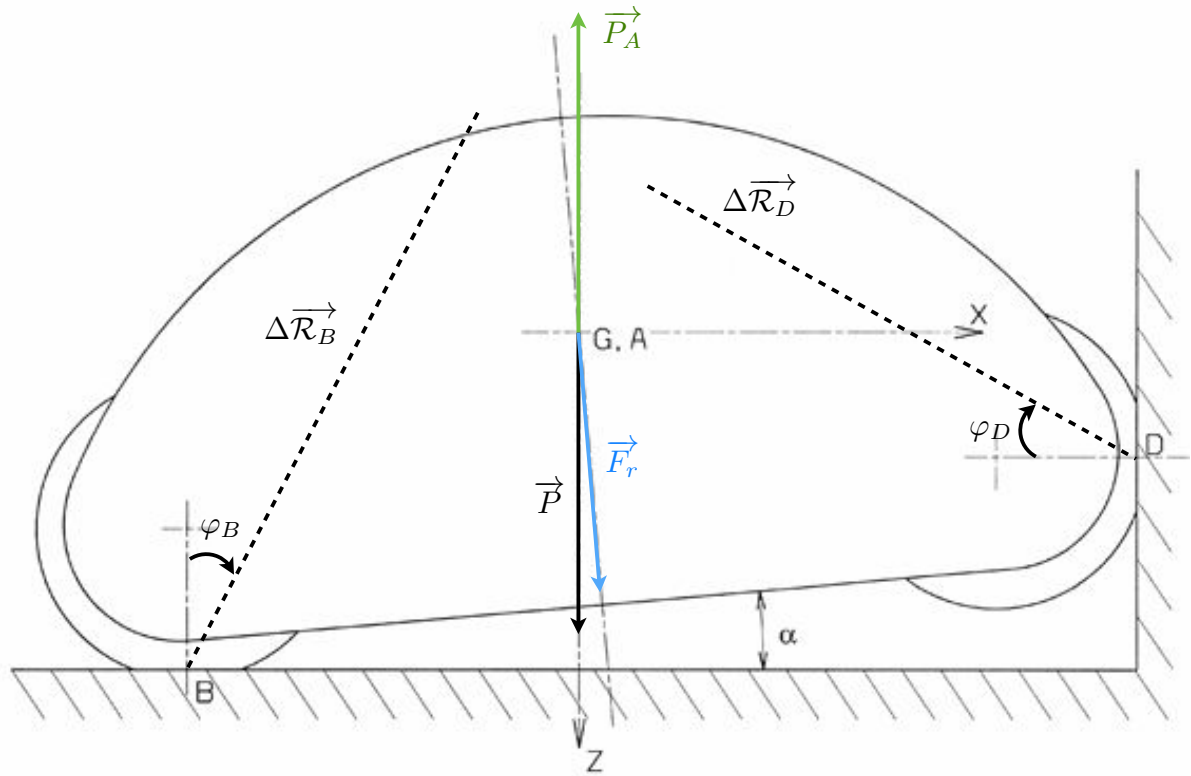
— la force de refoulement

$$\{\mathcal{T}_{\text{ref}\rightarrow r}\} = \begin{Bmatrix} F_r \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

— la force de trainée, supposée négligeable ;

— les actions de contact des brosses avec le sol en  $B$  et avec la paroi en  $D$ . Supposant les brosses motrices, alors on a, à la limite du glissement :

$$\left\{ \mathcal{T}_{0\rightarrow r}^{\textcircled{B}} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{F_B}{\sqrt{1+f^2}} (f \vec{x} - \vec{z}) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{T}_{0\rightarrow r}^{\textcircled{D}} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{-F_D}{\sqrt{1+f^2}} (\vec{x} + f \vec{z}) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$$



**Question 9.4.** Sachant  $\alpha = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ , il vient, en résolution plane, les projections de l'équation de résultante :

$$/\vec{x} : 0 = F_r \sin(\alpha) + \frac{f F_B}{\sqrt{1+f^2}} - \frac{F_D}{\sqrt{1+f^2}}$$

$$/\vec{z} : 0 = Mg - P_A + F_r \cos(\alpha) - \frac{F_B}{\sqrt{1+f^2}} - \frac{f F_D}{\sqrt{1+f^2}}$$

Par équation de moment en G, avec les changements de point

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{G,0 \rightarrow r}^{\oplus}} &= \overrightarrow{M_{B,0 \rightarrow r}^{\oplus}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow r}^{\oplus}} \wedge \overrightarrow{BG} \\ &= \frac{F_B}{\sqrt{1+f^2}} (f \vec{x} - \vec{z}) \wedge -(a \vec{x} + b \vec{z}) \\ &= \frac{F_B}{\sqrt{1+f^2}} (a + fb) \vec{y} \\ \overrightarrow{M_{G,0 \rightarrow r}^{\ominus}} &= \overrightarrow{M_{D,0 \rightarrow r}^{\ominus}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow r}^{\ominus}} \wedge \overrightarrow{DG} \\ &= \frac{-F_D}{\sqrt{1+f^2}} (\vec{x} + f \vec{z}) \wedge -(c \vec{x} + d \vec{z}) \\ &= \frac{F_D}{\sqrt{1+f^2}} (fc - d) \vec{y} \end{aligned}$$

d'où

$$/(G, \vec{y}) : 0 = \frac{F_B}{\sqrt{1+f^2}} (a + fb) + \frac{F_D}{\sqrt{1+f^2}} (fc - d)$$

Si on considère que  $\alpha \simeq 0$  [ $2\pi$ ], on peut faire l'approximation au 1<sup>er</sup> ordre :

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad \cos \alpha \approx 1$$

telle que l'on puisse écrire le système :

$$\begin{cases} 0 = \alpha F_r + \frac{fF_B - F_D}{\sqrt{1+f^2}} \\ 0 = Mg - P_A + F_r - \frac{F_B + fF_D}{\sqrt{1+f^2}} \\ 0 = F_B(a + fb) + F_D(fc - d) \end{cases}$$

**Question 9.5.** Considérant  $\alpha \ll 1$  et  $\left| \frac{F_r}{fF_B - F_D} \right| = O(1)$ , il vient  $|\alpha F_r| \ll |fF_B - F_D|$  d'où le sous-système

$$\begin{cases} 0 = \frac{fF_B - F_D}{\sqrt{1+f^2}} \\ 0 = F_B(a + fb) + F_D(fc - d) \end{cases} \iff \begin{cases} fD = fF_B \\ F_B(a + fb + f^2c - df) = 0 \end{cases}$$

d'où,

$$\forall F_B \neq 0, cf^2 + (b-d)f + a = 0 \iff f = \frac{(d-b) \pm \sqrt{(b-d)^2 - 4ac}}{2c}$$

Avec les valeurs numériques données, il vient

$$f = 0,668 \quad \text{ou} \quad f = -1,046$$

Sachant  $f \in \mathbb{R}^+$ , on choisit  $f \geq 0,67$ .

## Banc de test moteurs

**Question 10.1.** On isole le moteur. Il est soumis aux actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre  $A$  :

$$\left\{ \mathcal{F}_{0 \rightarrow m}^{\textcircled{A}} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison sphère-cylindre de centre  $B$  et d'axe  $(B, \vec{y})$  :

$$\left\{ \mathcal{F}_{0 \rightarrow m}^{\textcircled{B}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} X_B \vec{x} + Z_B \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison sphère-plan de normale  $(C, \vec{z})$  :

$$\left\{ \mathcal{F}_{0 \rightarrow m}^{\textcircled{C}} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} Z_C \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— le couple moteur

$$\left\{ \mathcal{F}_{c \rightarrow m} \right\}_* = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{x} \end{array} \right\}$$

— l'action de pesanteur

$$\left\{ \mathcal{F}_{\text{pes} \rightarrow m} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Par changements de point, il vient au point  $A$  les moments :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{A,0 \rightarrow M}^{\textcircled{B}} &= \overrightarrow{M}_{B,0 \rightarrow M}^{\textcircled{B}} + \overrightarrow{F}_{0 \rightarrow M}^{\textcircled{B}} \wedge \overrightarrow{BA} \\ &= (X_B \vec{x} + Z_B \vec{z}) \wedge -l_{yB} \vec{y} \\ &= l_{yB} (Z_B \vec{x} - X_B \vec{z}) \\ \overrightarrow{M}_{A,0 \rightarrow M}^{\textcircled{C}} &= \overrightarrow{M}_{C,0 \rightarrow M}^{\textcircled{C}} + \overrightarrow{F}_{0 \rightarrow M}^{\textcircled{C}} \wedge \overrightarrow{CA} \\ &= (Z_C \vec{z}) \wedge -(l_{xC} \vec{x} + l_{yC} \vec{y} + l_{zC} \vec{z}) \\ &= Z_C (l_{yC} \vec{x} - l_{xC} \vec{y}) \\ \overrightarrow{M}_{A,\text{pes} \rightarrow M} &= \overrightarrow{M}_{G,\text{pes} \rightarrow M} + \overrightarrow{F}_{\text{pes} \rightarrow m} \wedge \overrightarrow{CA} \\ &= (-mg \vec{z}) \wedge -(l_{xG} \vec{x} + l_{yG} \vec{y} + l_{zG} \vec{z}) \\ &= -mg (l_{yG} \vec{x} - l_{xG} \vec{y}) \end{aligned}$$

Avec 6 inconnues et 6 équations, il semble possible résoudre le problème. Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} / \vec{x} : \quad 0 = X_A + X_B \\ / \vec{y} : \quad 0 = Y_A \\ / \vec{z} : \quad 0 = Z_A + Z_B + Z_C - mg \\ / (A, \vec{x}) : \quad 0 = l_{yB}Z_B + l_{yC}Z_C + C_r - l_{yG}mg \\ / (A, \vec{y}) : \quad 0 = -l_{xC}Z_C + l_{xG}mg \\ / (A, \vec{z}) : \quad 0 = -l_{yB}X_B \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} X_A = 0 \\ Y_A = 0 \\ Z_A = mg - Z_B - Z_C \\ Z_B = \frac{1}{l_{yB}}(l_{yG}mg - C_r - l_{yC}Z_C) \\ Z_C = \frac{l_{xG}}{l_{xC}}mg \\ X_B = 0 \end{array} \right.$$

d'où

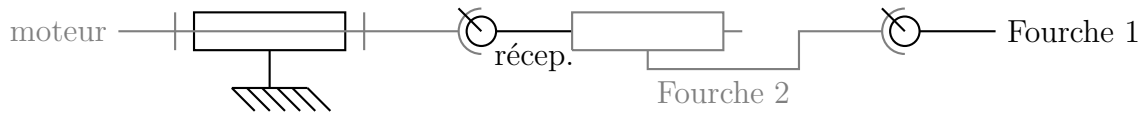
$$\boxed{X_A = X_B = Y_A = 0 \text{ N}, \quad Z_A = \frac{C_r}{l_{yB}} + mg \left( 1 + \frac{l_{xG}l_{yC}}{l_{xC}l_{yB}} - \frac{l_{yG}}{l_{yB}} - \frac{l_{xG}}{l_{xC}} \right), \\ Z_B = mg \left( \frac{l_{yG}}{l_{yB}} - \frac{l_{yC}l_{xG}}{l_{xC}l_{yB}} \right) - \frac{C_r}{l_{yB}} \quad \text{et} \quad Z_C = mg \frac{l_{xG}}{l_{xC}}}$$

## 10.1 Liaison moteur-frein / arbre de transmission

**Question 10.2.** Les cannelures permettent de bloquer la rotation. De plus, comme le rapport  $L/D$  est supérieur à 1,5, alors ces contacts permettent de réaliser une liaison glissière.

**Question 10.3.** La rotule est une liaison sphérique entre le plateau moteur et le plateau récepteur. Le flasque caoutchouc permet de transmettre un couple entre le plateau moteur et le plateau récepteur. Ces deux liaisons sont en parallèle car toutes les deux relient le plateau moteur au plateau récepteur. La liaison équivalente est donc une sphérique à doigt.

**Question 10.4.** D'après les deux questions précédentes, il vient le schéma cinématique :



Ce type de transmission, de type double joint de Cardan, permet de s'affranchir de légers défauts d'alignement des axes moteur et récepteur (deux sphériques à doigt) ainsi qu'une certaine variation de distance le long de l'axe (glissière).

## 10.2 Accouplement conique

Dans ce qui suit, on cherche à déterminer le couple maximal transmissible avec un accouplement conique sur la surface

$$S = \left\{ M \mid \overrightarrow{OM} = x \vec{x} + r(x) \vec{e}_r(\theta), \quad x \in [0, L], \quad \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

où

$$r : x \mapsto R_2 + \frac{R_1 - R_2}{L}x = R_2 - \tan(\alpha)x$$

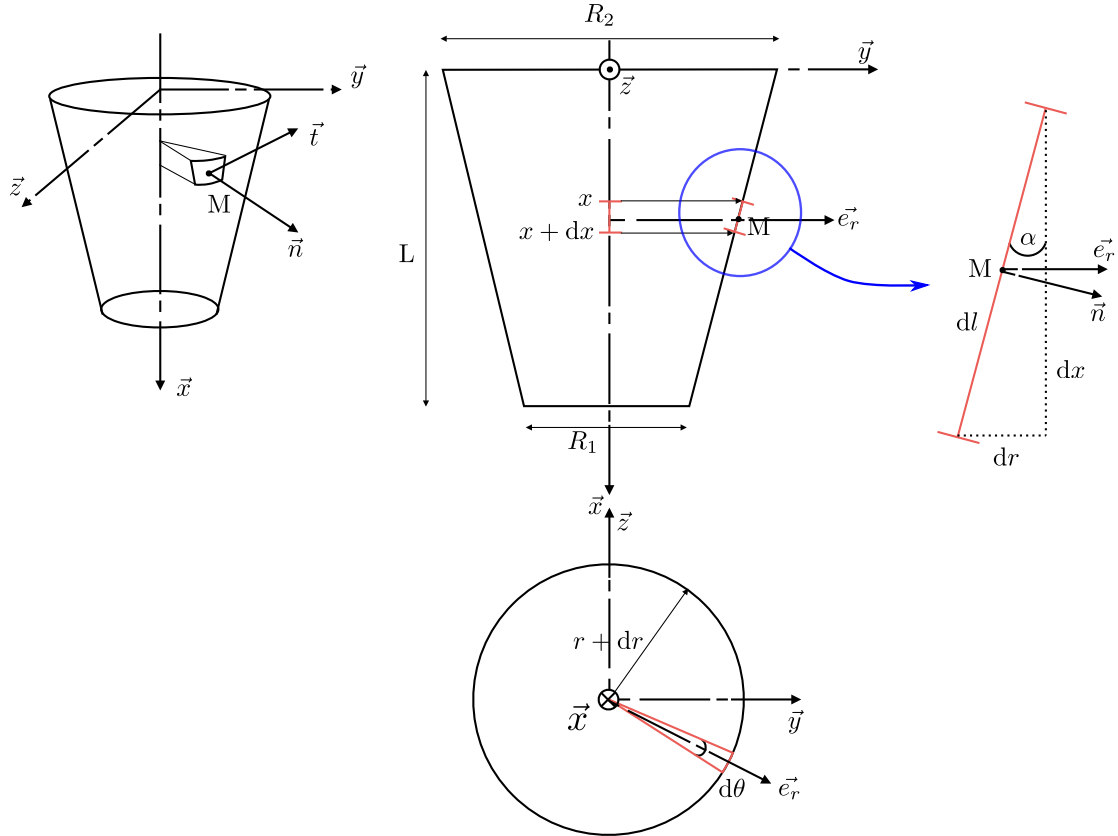
On se place à la limite du glissement et on considère un champ de rotation

$$\forall P \in (O, \vec{x}), \quad \{\mathcal{V}_{2/1}\}_P = \begin{Bmatrix} \omega \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}, \quad \omega > 0$$

tel que

$$\forall M \in S, \quad \vec{V}_{M,2/1} = r(x)\omega \vec{t}$$

On considère l'action mécanique élémentaire de contact en un point  $M$  de la surface



sur un élément de surface

$$dS = dl \times r d\theta = \frac{dx}{\cos(\alpha)} \times r d\theta = \frac{R_2 - \tan(\alpha)x}{\cos(\alpha)} dx d\theta$$

On note  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = d\vec{N}_{1 \rightarrow 2} + d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  l'action mécanique élémentaire avec

$$d\vec{N}_{1 \rightarrow 2} = -p \vec{n} dS$$

sa contribution normale et  $d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  sa contribution tangentielle. D'après les lois de Coulomb, on a :

$$\begin{aligned} d\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \wedge \vec{V}_M &= \vec{0} \\ d\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \wedge \vec{V}_M &\leq 0 \\ \|d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| &= \mu \|d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \end{aligned}$$

d'où

$$\overrightarrow{dT_{1 \rightarrow 2}} = -\mu p \vec{t} \, dS$$

Il vient alors l'action mécanique élémentaire

$$\{d\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} -p (\vec{n} + \mu \vec{t}) \, dS \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

**Question 10.5.** Pour déterminer l'effort axial  $F_x = \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \cdot \vec{x}$ , il est nécessaire d'intégrer la projection dans la direction  $\vec{x}$  de l'action mécanique élémentaire. Sachant

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \cos(\alpha) \vec{e}_r + \sin(\alpha) \vec{x} \\ \vec{t} &= \cos(\theta) \vec{z} - \sin(\theta) \vec{y} \\ \vec{e}_r &= \cos(\theta) \vec{y} + \sin(\theta) \vec{z} \end{aligned}$$

il vient

$$(\vec{n} + \mu \vec{t}) \cdot \vec{x} = \sin(\alpha)$$

d'où

$$\begin{aligned} F_x &= \int_0^L \int_0^{2\pi} -p \sin(\alpha) \, dS = \int_0^L \int_0^{2\pi} -p \tan(\alpha) (R_2 - \tan(\alpha)x) \, d\theta \, dx \\ &= -2\pi p \tan(\alpha) \left( R_2 L - \tan(\alpha) \frac{L^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Notant que  $\tan(\alpha) = \frac{R_2 - R_1}{L}$ , il vient

$$F_x = -2\pi p \left( \frac{R_2 - R_1}{L} \right) \left( \frac{R_2 + R_1}{2} \right) L$$

soit, après factorisation

$$\boxed{F_x = -\pi (R_2 - R_1)^2 p}$$

qui correspond bien à l'action de la pression uniforme  $p$  sur la surface du cône projetée sur un plan de normale  $\vec{x}$  correspondant à un anneau entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ .

**Question 10.6.** Pour déterminer le couple transmissible  $C = \overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} \cdot \vec{x}$ , il est nécessaire d'intégrer la projection autour de l'axe  $(O, \vec{x})$  du moment élémentaire. Par changement de point, il vient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM_{O,1 \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{dM_{M,1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{MO} \\ &= -p (\vec{n} + \mu \vec{t}) \, dS \wedge - (x \vec{x} + r(x) \vec{e}_r) \\ &= -\mu p r(x) \, dS \vec{x} + \dots \end{aligned}$$

d'où

$$C = \int_0^L \int_0^{2\pi} -\mu p r(x) \, dS = \int_0^L \int_0^{2\pi} -\mu p \frac{(R_2 - \tan(\alpha)x)^2}{\cos(\alpha)} \, d\theta \, dx = -\frac{2\pi\mu p}{\cos(\alpha)} \left[ \frac{(\tan(\alpha)x - R_2)^3}{3 \tan(\alpha)} \right]_0^L$$

Utilisant la relation  $\tan(\alpha) = \frac{R_2 - R_1}{L}$ , il vient finalement

$$C = -\frac{2\pi\mu p}{3\sin(\alpha)} (R_2^3 - R_1^3)$$

**Question 10.7.** Avec

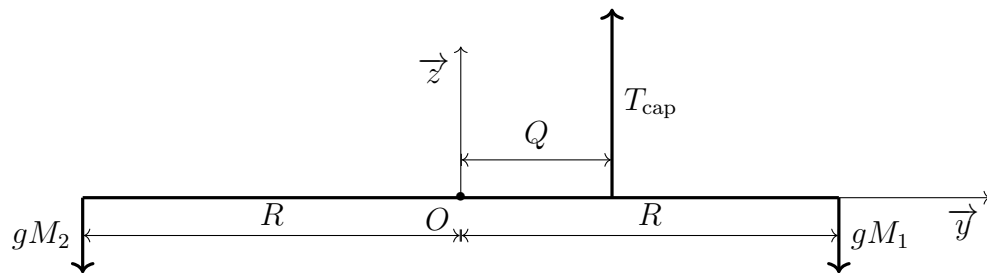
$$\begin{cases} F_x = -\pi (R_2 - R_1)^2 p \\ C = -\frac{2\pi\mu p}{3\sin(\alpha)} (R_2^3 - R_1^3) \end{cases} \iff \begin{cases} F_x = (-\pi p) \times (R_2 - R_1)^2 \\ -\pi p = \frac{3C \sin(\alpha)}{2\mu (R_2^3 - R_1^3)} \end{cases}$$

d'où

$$F_x = \frac{3\sin(\alpha)}{2\mu} \frac{(R_2 - R_1)^2}{(R_2^3 - R_1^3)} C$$

### 10.3 Calibrage du capteur d'effort

D'après la figure 10.2, on a un problème d'équilibre du type



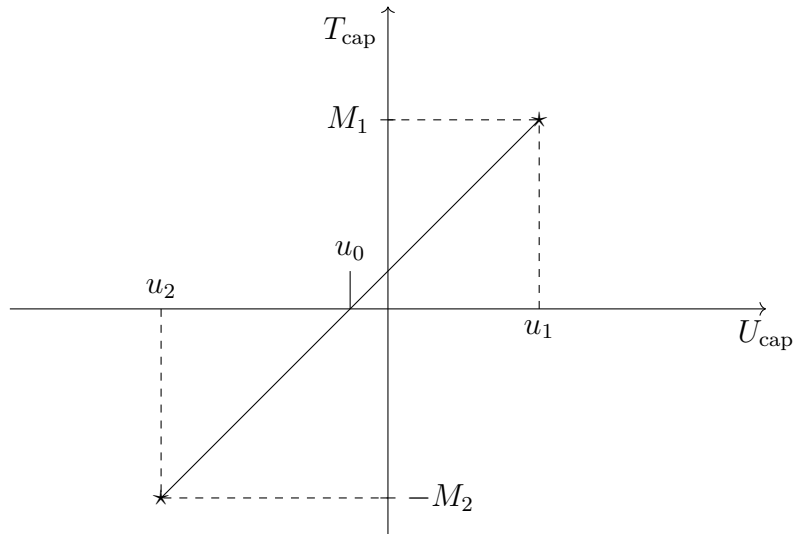
**Question 10.8.** En fixant  $M_1 = 0$ , par équation de moment autour de l'axe  $(O, \vec{x})$ , il vient :

$$QT_{\text{cap}} + RgM_2 = 0 \iff T_{\text{cap}} = \frac{-R}{Q}gM_2$$

**Question 10.9.** De façon similaire, fixant  $M_2 = 0$ , par équation de moment autour de l'axe  $(O, \vec{x})$ , il vient :

$$QT_{\text{cap}} - RgM_1 = 0 \iff T_{\text{cap}} = \frac{R}{Q}gM_1$$

**Question 10.10.** Ce double calibrage permet de régler le « zéro », tel que l'on ait, par exemple en notant  $U_{\text{extcap}}$  la tension du capteur, la caractéristique :



où  $u_0$  n'est pas forcément nulle ; d'où la nécessité d'une mesure avec le capteur en traction et une mesure du capteur en compression.

## 10.4 Système de démarrage

**Question 10.11.** La roue libre permet de désaccoupler le moteur électrique du moteur thermique dès que la rotation de ce dernier — rapportée sur l'axe du moteur électrique (sur lequel est la roue libre) en tenant compte de la transmission poulie courroie — est plus importante. Ce désaccouplement permet de protéger le moteur électrique contre une survitesse qui ne puisse supporter.

**Question 10.12.** En tenant compte du rapport de transmission de

$$\frac{\omega_e}{\omega_{md}} = \frac{\varnothing D_{ph}}{\varnothing D_{pb}} = 2$$

et en faisant l'hypothèse d'un rendement unitaire du système poulies-courroie, il vient qu'à chaque instant le couple du moteur électrique doit vérifier

$$C_e \omega_e = C_{md} \omega_{md} \iff C_e = \frac{C_{md}}{2} = 9 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Sur la caractéristique du moteur, on voit que le couple de démarrage  $C_D = 18 \text{ N}\cdot\text{m}$ , puis chute à  $C_A = 16 \text{ N}\cdot\text{m}$  avant d'évoluer jusqu'à son nominal  $C_N = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$  en passant par un maximum  $C_M$ . Pendant toute la phase de démarrage, c'est-à-dire de  $N = 0$  à  $N = N_N$ , le couple moteur est supérieur à  $C_N = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$  donc le démarreur peut entraîner le moteur thermique. Le choix du moteur est validé.