Séries

Cours de É. Bouchet – PCSI

25 mars 2026

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Série, terme général, somme partielle)

Soit u une suite. On appelle **série** de **terme général** u_k la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On note $\sum u_k$ cette suite. À n fixé, le terme S_n est appelé la **somme partielle** d'ordre n de la série.

Remarque. On a donc $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$, etc.

Remarque. On note parfois $\sum_{k \geqslant 0} u_k$ à la place de $\sum u_k$ pour indiquer clairement la valeur du premier terme.

Définition 1.2 (Convergence ou divergence d'une série, somme)

Soit u une suite. On dit que la série $\sum u_k$ **converge** (resp. **diverge**) lorsque la suite (S_n) des sommes partielles converge (resp. diverge).

Quand la série est convergente, sa limite est alors appelée **somme** de la série et on la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Remarque. Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente

Exercice 1. Montrer que $\sum k$ diverge.

Définition 1.3 (Reste d'une série convergente)

Soit u une suite telle que la série $\sum u_k$ converge. On appelle **reste** d'ordre n de la série la valeur :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque. Quand la série $\sum u_k$ converge, on a $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Le reste d'une série convergente converge donc toujours vers 0.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Proposition 1.4 (Condition nécessaire de convergence d'une série)

Soit u une suite. Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.

Remarque. Pour prouver qu'une série diverge, on peut utiliser la contraposée de ce résultat : il suffit de prouver que le terme général de la série ne converge pas vers 0. On parle alors de **divergence grossière**.

Remarque. ATTENTION : Réciproque fausse ! On peut avoir (u_n) qui tend vers 0 sans que la série ne converge.

Exercice 2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 3. La série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Calculer $S_{2n} - S_n$. En minorant cette expression, montrer que la série harmonique diverge.

1.3 Opérations usuelles

Proposition 1.5 (Cas des termes généraux qui diffèrent par un nombre fini de termes)

Soit u et v deux suites qui ne diffèrent que par un nombre fini de termes. Alors les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

Remarque. Attention : comme les premiers termes peuvent différer, les sommes des séries n'ont aucune raison d'être égales (même dans le cas convergent).

Proposition 1.6 (Linéarité des séries convergentes)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et λ et μ deux constantes réelles ou complexes. La série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ est convergente et vérifie : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Remarque. Attention : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ peut converger sans que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne convergent. Dans ce cas, la formule précédente ne s'applique pas. Par exemple, $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n})$ est la série nulle, qui converge. Mais comme la série harmonique diverge, on n'a donc pas le droit d'utiliser la linéarité sur les sommes infinies.

Remarque. De manière générale, il faut être extrêmement méfiant quand on manipule des sommes infinies : de nombreux résultats qui sont évidents pour des sommes finies ne sont plus vérifiés pour les sommes de séries. Par exemple, la limite d'une somme infinie n'est pas toujours la somme infinie de la limite...

1.4 Quelques séries de référence

Proposition 1.7 (Convergence des séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La **série géométrique** $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Quand elle converge, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Proposition 1.8 (Convergence des séries télescopiques)

Soit u une suite. La suite (u_k) et la **série télescopique** $\sum (u_{k+1} - u_k)$ ont même nature en terme de convergence.

Exercice 4. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et déterminer sa somme si elle converge.

Proposition 1.9 (Convergence de la série exponentielle)

Soit $z \in \mathbb{C}$. La **série exponentielle** $\sum \frac{z^k}{k!}$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

Exercice 5. Montrer que $\sum \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$ converge et déterminer sa somme.

2 Séries à termes réels positifs

2.1 Critères de convergence

Proposition 2.1 (Condition nécessaire et suffisante de convergence)

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Remarque. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Quand la série associée diverge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 2.2 (Convergence par comparaison)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$, telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ alors la série $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$.

Remarque. Attention, ce résultat ne signifie pas nécessairement que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$: les premiers termes peuvent modifier significativement les valeurs des sommes.

Proposition 2.3 (Convergence par équivalences)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature en terme de convergence.

Remarque. ATTENTION : cela ne signifie pas que les suites des sommes partielles sont équivalentes, puisqu'on n'a pas le droit de sommer des équivalents.

Exercice 6. Étudier la convergence de $\sum \frac{1}{2n+1}$.

2.2 Séries de Riemann

Proposition 2.4 (Convergence de la série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann** et converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque. Cette technique de comparaison avec une intégrale est très utile pour encadrer des sommes partielles, elle se généralise au cas de n'importe quelle fonction f monotone.

Exercice 7. On revient à l'étude de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, dont on note S_n les sommes partielles.

1. Soit $k \geqslant 2$. Montrer que $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$.
2. Donner un équivalent à S_n.

3 Convergence absolue

3.1 Définition et théorème fondamental

Définition 3.1 (Série absolument convergente)

Soit u une suite. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou que la suite u est **sommable**) lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Remarque. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Exercice 8. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge absolument.

Proposition 3.2 (Convergence des séries absolument convergentes)

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque. ATTENTION : La réciproque est fausse : une série peut converger sans converger absolument.

Exemple. Montrons que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge sans être absolument convergente.
$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ est le terme général de la série harmonique, divergente. Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument.
Montrons maintenant la convergence. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Alors,

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+2} + (-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leqslant 0$.
  Donc la suite (S_{2n}) est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}\frac{1}{2n+3} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \geqslant 0$.
  Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1}$ converge vers 0.

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes, et par théorème de convergence, elles convergent toutes les deux vers une même limite ℓ. Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$ et la série converge (vers ℓ).

3.2 Critère de convergence par domination

Proposition 3.3 (Convergence par domination)

Soit v une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et soient u une suite (réelle ou complexe) qui vérifie $u_n = O(v_n)$. Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).

Remarque. Ce résultat fonctionne également en remplaçant le $O(v_n)$ par un $o(v_n)$, puisque c'est une condition plus contraignante.

Remarque. Il est impossible de montrer la divergence d'une série par un critère de domination ou négligeabilité.

Exercice 9. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \exp(-\sqrt{n})$.