

**Exercice 1 (★).** Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série converge puis donner sa somme si possible :

$$\begin{array}{llll}
 1. \sum_{n \geq 0} n^2 & 2. \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 3. \sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^n} & 4. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \\
 5. \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} & 6. \sum_{n \geq 1} \frac{5}{6^n} & 7. \sum_{n \geq 0} 2^n & 8. \sum_{n \geq 2} \left(\frac{2}{3}\right)^n
 \end{array}$$

**Exercice 2 (★★).** Dans chacun des cas suivants, montrer que la série converge et calculer sa somme :

$$\begin{array}{lll}
 1. \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!} & 2. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} & 3. \sum_{n \geq 0} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}
 \end{array}$$

**Exercice 3 (★★).** On considère la série de terme général  $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , écrire  $u_n$  sous la forme  $u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$ .
- Calculer alors la somme de la série.

**Exercice 4 (★).** Étudier la nature de la série de terme général  $u_n$  dans les cas suivants.

$$\begin{array}{llll}
 1. u_n = \frac{n+1}{n} & 2. u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} & 3. u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} & 4. u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \\
 5. u_n = \frac{1}{n^2 + \sin(n^6)} & 6. u_n = \frac{n^2 + 3n + 4}{2(n+1)^4 + \ln(n)} & 7. u_n = \frac{\ln(n)}{n^3} & 8. u_n = \frac{\sin(n)}{n^2} \\
 9. u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{e^n} & 10. u_n = \frac{(-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right)n^2}{e^{\frac{n}{2}}} & 11. u_n = \frac{3n^2 - \ln(n+1)}{5(n+1)^3} & 12. u_n = \frac{1}{\ln(n)}
 \end{array}$$

**Exercice 5 (★).** Étudier la convergence des séries de terme général

$$\begin{array}{ll}
 1. u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) & 2. v_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
 \end{array}$$

**Exercice 6 (★).** On suppose que  $\sum u_n$  est une série à termes positifs convergente. Montrer alors que la série de terme général  $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$  converge aussi.

**Exercice 7 (★★).** Étudier la nature de la série de terme général  $u_n$  dans les cas suivants.

$$\begin{array}{lll}
 1. u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} & 2. u_n = \ln\left(\frac{2 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right) & 3. u_n = \frac{\cos(n^2) + n \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}}
 \end{array}$$

**Exercice 8 (★★).** On définit la suite  $(v_n)$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ .

- Montrer que la suite  $(v_n)$  est convergente et calculer sa limite.
- Montrer que pour tous entiers  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_n^{n+m+1} \frac{1}{x^3} dx \leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$ .
- En déduire un équivalent de  $v_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 9 (★★★).** Démontrer la convergence de la série de terme général  $ne^{-n^2}$ , puis montrer que ses restes  $R_n$  vérifient  $|R_n| \leq \frac{1}{2}e^{-n^2}$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Exercice 10 (★★).** Soit  $x \in ]-1, 1[$  et  $P$  un polynôme de degré inférieur à 2. On cherche à étudier  $\sum P(n)x^n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on introduit la fonction  $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ , définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Justifier que  $S_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .
2. En exprimant  $S'_n(x)$  de deux manières différentes, montrer que  $\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$  converge et donner sa somme.
3. Montrer que  $\sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2)x^n$  est convergente et donner sa somme.
4. En déduire que  $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$  existent et déterminer leurs valeurs.
5. De façon générale, quelle méthode adopter pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  quelconque ?

**Exercice 11 (Type DS).** On considère la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{\text{ch}(u_n)}$ .

1. Soit  $(x_n)$  une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général  $x_n$  converge, alors la série de terme général  $x_n^2$  converge aussi.
2. Rappeler le tableau de variations de la fonction  $\text{ch}$ , ainsi que son développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.
3. (a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est strictement positive et décroissante.  
(b) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et donner sa limite.
4. On pose, pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}$  :  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ .  
(a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est négative.  
(b) Montrer que  $(v_n)$  est convergente de limite nulle.  
(c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , simplifier  $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$ . En déduire que la série de terme général  $v_n$  diverge.
5. (a) Montrer que :  $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$ .  
(b) En déduire que la série de terme général  $u_n^2$  diverge.  
(c) Conclure quant à la nature de la série de terme général  $u_n$ .