Séries

Cours de É. Bouchet – PCSI

29 avril 2026

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Série, terme général, somme partielle)

Soit u une suite. On appelle **série** de **terme général** u_k la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On note $\sum u_k$ cette suite. À n fixé, le terme S_n est appelé la **somme partielle** d'ordre n de la série.

Remarque. On a donc $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$, etc.

Remarque. On note parfois $\sum_{k \geqslant 0} u_k$ à la place de $\sum u_k$ pour indiquer clairement la valeur du premier terme.

Définition 1.2 (Convergence ou divergence d'une série, somme)

Soit u une suite. On dit que la série $\sum u_k$ **converge** (resp. **diverge**) lorsque la suite (S_n) des sommes partielles converge (resp. diverge).

Quand la série est convergente, sa limite est alors appelée **somme** de la série et on la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Remarque. Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente

Exercice 1. Montrer que $\sum k$ diverge.
Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\sum k$ diverge.

Définition 1.3 (Reste d'une série convergente)

Soit u une suite telle que la série $\sum u_k$ converge et $n \in \mathbb{N}$. On appelle **reste** d'ordre n de la série la valeur :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque. Quand la série $\sum u_k$ converge, on a $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Le reste d'une série convergente converge donc toujours vers 0.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Proposition 1.4 (Condition nécessaire de convergence d'une série)

Soit u une suite. Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.

Démonstration. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Notons S_n ses sommes partielles et S sa somme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ et par passage à la limite (possible car la série converge), u converge vers $S - S = 0$. $\square$

Remarque. Pour prouver qu'une série diverge, on peut utiliser la contraposée de ce résultat : il suffit de prouver que le terme général de la série ne converge pas vers 0. On parle alors de **divergence grossière**.

Remarque. ATTENTION : Réciproque fausse ! On peut avoir (u_n) qui tend vers 0 sans que la série ne converge.

Exercice 2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n}{n+1}$.
Solution : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 \neq 0$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exercice 3. La série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Calculer $S_{2n} - S_n$. En minorant cette expression, montrer que la série harmonique diverge.
Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, alors $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$, ce qui donne en sommant :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

On raisonne par l'absurde : supposons que la série converge, on note alors S sa somme. Par unicité de la limite, on a $\lim S_n = \lim S_{2n} = S$ donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve $0 \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est impossible. Donc la série harmonique diverge.

1.3 Opérations usuelles

Proposition 1.5 (Cas des termes généraux qui diffèrent par un nombre fini de termes)

Soit u et v deux suites qui ne diffèrent que par un nombre fini de termes. Alors les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

Démonstration. Par définition de u et v, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n$. Soit $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Comme $\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k$ est une constante, les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature. □

Remarque. Attention : comme les premiers termes peuvent différer, les sommes des séries n'ont aucune raison d'être égales (même dans le cas convergent).

Proposition 1.6 (Linéarité des séries convergentes)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et λ et μ deux constantes réelles ou complexes. La série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ est convergente et vérifie : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de la somme (finie),

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Les hypothèses donnent la convergence du membre de droite, par combinaison linéaire de limites finies. Donc la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et le passage à la limite dans l'égalité précédente donne la relation sur les sommes des séries. □

Remarque. Attention : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ peut converger sans que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne convergent. Dans ce cas, la formule précédente ne s'applique pas. Par exemple, $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n})$ est la série nulle, qui converge. Mais comme la série harmonique diverge, on n'a donc pas le droit d'utiliser la linéarité sur les sommes infinies.

Remarque. De manière générale, il faut être extrêmement méfiant quand on manipule des sommes infinies : de nombreux résultats qui sont évidents pour des sommes finies ne sont plus vérifiés pour les sommes de séries. Par exemple, la limite d'une somme infinie n'est pas toujours la somme infinie de la limite...

1.4 Quelques séries de référence

Proposition 1.7 (Convergence des séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La **série géométrique** $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Quand elle converge, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration. On procède par disjonction de cas :

- Si $|q| < 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$. Donc la série $\sum q^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
- Si $|q| \geqslant 1$, la suite (q^n) ne converge pas vers 0 (les modules restent toujours supérieurs à 1) donc la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.

$\square$

Proposition 1.8 (Convergence des séries télescopiques)

Soit u une suite. La suite (u_k) et la **série télescopique** $\sum (u_{k+1} - u_k)$ ont même nature en terme de convergence.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la n-ième somme partielle. Un télescopage donne :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, (S_n) converge alors vers $\ell - u_0$. Réciproquement, si (S_n) converge vers $\ell' \in \mathbb{C}$, (u_n) converge alors vers $\ell' + u_0$. D'où le résultat annoncé. $\square$

Exercice 4. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et déterminer sa somme si elle converge.
<u>Solution :</u> On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, d'où par calcul de somme télescopique, $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1.$$

Donc la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et sa somme vaut 1.

Proposition 1.9 (Convergence de la série exponentielle)

Soit $z \in \mathbb{C}$. La **série exponentielle** $\sum \frac{z^k}{k!}$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

Démonstration. Soit la fonction $f : t \mapsto e^{tz}$ définie sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Elle est de classe C^∞ sur $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $f^{(n)}(t) = z^n e^{tz}$. Donc :

$$\forall t \in [0,1], \quad \left|f^{(n+1)}(t)\right| = \left|z^{n+1} e^{tz}\right| = \left|z^{n+1}\right| e^{t\,\mathrm{Re}(z)} \leqslant \left|z^{n+1}\right| \max(e^{\mathrm{Re}(z)}, 1),$$

où cette majoration est obtenue par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et disjonction de cas en fonction du signe de la partie réelle. Notons $M = \max(e^{\mathrm{Re}(z)}, 1)$. On peut alors appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre n entre 0 et 1 :

$$\left|f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)}(0)\right| = \left|e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \left|z^{n+1}\right| M = \frac{\left|z^{n+1}\right|}{(n+1)!} M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où la limite est obtenue par croissances comparées. Donc (par encadrement) la série $\sum \frac{z^k}{k!}$ converge et sa somme vaut e^z. $\square$

Exercice 5. Montrer que $\sum \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$ converge et déterminer sa somme.
Solution : On reconnaît (à décalage d'indice près) une série exponentielle convergente, donc la série converge. On peut alors calculer sa somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2^i}{i!} - 1 = e^2 - 1,$$

où on a utilisé le changement d'indice $i = k+1$.

2 Séries à termes réels positifs

2.1 Critères de convergence

Proposition 2.1 (Condition nécessaire et suffisante de convergence)

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration. On note (S_n) la suite des sommes partielles.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ donc cette suite est croissante.

- Supposons que la suite (S_n) est majorée, comme elle est aussi croissante elle converge, et la série converge.
- Réciproquement, si la série converge, comme la suite (S_n) est croissante, elle reste toujours plus petite que sa limite. Elle est donc majorée par la somme de la série.

□

Remarque. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Quand la série associée diverge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 2.2 (Convergence par comparaison)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$, telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ alors la série $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$.

Remarque. Attention, ce résultat ne signifie pas nécessairement que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$: les premiers termes peuvent modifier significativement les valeurs des sommes.

Démonstration. On note n_0 le rang à partir duquel $u_n \leqslant v_n$.

- On suppose que $\sum v_n$ converge. Soit $n \geqslant n_0$, comme les suites sont à termes positifs, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

  Les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont donc majorées. Comme la série est à termes positifs, c'est donc qu'elle converge par le résultat précédent.

- On suppose que $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$ comme elle est à termes positifs). Soit $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

  Donc par théorème de comparaison, la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$. Donc la série $\sum v_n$ diverge.

$\square$

Exercice 6. Étudier la nature de $\sum \frac{1}{k!+k}$.
Solution : $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{1}{k!+k} \leqslant \frac{1}{k!}$. Or $\sum \frac{1}{k!}$ est une série exponentielle convergente. Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{k!+k}$ converge.

Proposition 2.3 (Convergence par équivalences)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature en terme de convergence.

Démonstration. On suppose que $\sum v_n$ converge. Comme $u_n \sim v_n$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. En revenant à la définition de limite, il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{u_n}{v_n} \leqslant 2$. Par positivité des suites, on en déduit que $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$. Or $\sum(2v_n)$ converge. Le critère de comparaison précédent donne la convergence de $\sum u_n$. La réciproque s'obtient de même en intervertissant les rôles de u et v. $\square$

Remarque. ATTENTION : cela ne signifie pas que les suites des sommes partielles sont équivalentes, puisqu'on n'a pas le droit de sommer des équivalents.

Exercice 7. Étudier la nature de $\sum \frac{1}{2n+1}$.
Solution : On a $\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n} \geqslant 0$. Or $\sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique, qui diverge. Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge.

2.2 Séries de Riemann

Proposition 2.4 (Convergence de la série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann** et converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. On fait une disjonction de cas en fonction de la valeur de α

1. Si $\alpha = 1$, c'est la série harmonique, dont on a déjà montré qu'elle diverge.

2. Si $\alpha < 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ également.

3. Si $\alpha > 1$, on effectue une comparaison avec une intégrale. La fonction f définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc si on fixe $k \geqslant 2$ (garantit que $[k-1, k] \subset \mathbb{R}_+^*$) et $t \in [k-1, k]$, on a $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$. Comme $k-1 \leqslant k$, la croissance de l'intégrale donne alors :
$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$
Soit $n \geqslant 2$. En sommant sur $k \in [\![2, n]\!]$, la relation de Chasles donne $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$. Et donc
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$
Ainsi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée. C'est donc une série convergente.

$\square$

Remarque. Cette technique de comparaison avec une intégrale est très utile pour encadrer des sommes partielles, elle se généralise au cas de n'importe quelle fonction f monotone.

Exercice 8. On revient à l'étude de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, dont on note S_n les sommes partielles.

1. Soit $k \geqslant 2$. Montrer que $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$.

   Solution : Soit $k \geqslant 2$, et $t \in [k, k+1]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. Comme cette fonction est de plus continue sur $[k, k+1]$ et comme $k \leqslant k+1$, la croissance de l'intégrale donne alors :

   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dt = \frac{1}{k}.$$

   De même, soit $t \in [k-1, k]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ ($k \geqslant 2$ donc $k-1 > 0$), $\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{k}$. La croissance de l'intégrale sur $[k-1, k]$ donne alors :

   $$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}dt = \frac{1}{k}.$$

   D'où l'inégalité demandée.

2. Donner un équivalent à S_n.

   Solution : On somme de 2 à $n \geqslant 2$ l'inégalité de la question précédente (sommer directement de 1 à n est impossible car la question précédente nécessite $k \geqslant 2$). On obtient, par relation de Chasles :

   $$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t}dt.$$

   Ce qui donne après calculs : $\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant S_n - 1 \leqslant \ln(n) - 0$.

   D'où $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \dfrac{1-\ln(2)}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{S_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$. Par théorème d'encadrement, on trouve ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln(n)} = 1$ et donc $S_n \sim \ln(n)$.

3 Convergence absolue

3.1 Définition et théorème fondamental

Définition 3.1 (Série absolument convergente)

Soit u une suite. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou que la suite u est **sommable**) lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Remarque. On note alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Exercice 9. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge absolument.
Solution : On remarque que : pour tout $n \geqslant 1$, $|u_n| = \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente et comme les séries sont à termes positifs, le critère de comparaison donne la convergence de $\sum |u_n|$. Donc $\sum u_n$ converge absolument.

Proposition 3.2 (Convergence des séries absolument convergentes)

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\sum u_k$ une série absolument convergente.

- Si u est une suite réelle, on remarque que $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_k + |u_k| \leqslant 2|u_k|$. Or $\sum |u_k|$ converge. Donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum(u_k + |u_k|)$ converge. Et par combinaison linéaire de séries convergentes, $\sum u_k = \sum(u_k + |u_k|) - \sum |u_k|$ converge.

- Si u est une suite complexe, on remarque que $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_k)| \leqslant |u_k|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(u_k)| \leqslant |u_k|$. Or $\sum |u_k|$ converge. Donc par critère de comparaison de séries à termes positifs,$\sum |\mathrm{Re}(u_k)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(u_k)|$ convergent. Et d'après le cas des suites réelles, $\sum \mathrm{Re}(u_k)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_k)$ convergent. Donc par combinaison linéaire de séries convergentes, $\sum u_k = \sum \mathrm{Re}(u_k) + i \sum \mathrm{Im}(u_k)$ converge.

□

Remarque. ATTENTION : La réciproque est fausse : une série peut converger sans converger absolument.

Exemple. Montrons que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge sans être absolument convergente.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ est le terme général de la série harmonique, divergente. Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument.
Montrons maintenant la convergence. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Alors,

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+2} + (-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leqslant 0$.
  Donc la suite (S_{2n}) est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}\frac{1}{2n+3} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \geqslant 0$.
  Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1}$ converge vers 0.

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes, et par théorème de convergence, elles convergent toutes les deux vers une même limite ℓ. Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$ et la série converge (vers ℓ).

3.2 Critère de convergence par domination

Proposition 3.3 (Convergence par domination)

Soit v une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et soient u une suite (réelle ou complexe) qui vérifie $u_n = O(v_n)$. Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).

Démonstration. Puisque $u_n = O(v_n)$, $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée. Donc il existe un réel $K > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant K|v_n|$, c'est-à-dire $0 \leqslant |u_n| \leqslant K v_n$ puisque v est à termes positifs. Or $\sum v_n$ converge. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge aussi. □

Remarque. Ce résultat fonctionne également en remplaçant le $O(v_n)$ par un $o(v_n)$, puisque c'est une condition plus contraignante.

Remarque. Il est impossible de montrer la divergence d'une série par un critère de domination ou négligeabilité.

Exercice 10. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \exp(-\sqrt{n})$.
<u>Solution :</u> Par croissances comparées, on a $\lim_{n\to\infty} n^2 \exp(-\sqrt{n}) = 0$. Donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$ est le terme général d'une série de Riemann convergente $(2 > 1)$. Donc $\sum u_n$ converge (absolument).