

# Théorie des mécanismes

N. Mesnier

Lycée international Jean Perrin, Lyon

2025–2026

## ■ Contexte

- les mécanismes sont au cœur des systèmes mécaniques ;
- ils permettent de réaliser différentes transformations de mouvement ;
- leur modélisation est indispensable à leur dimensionnement, leur conception et plus généralement leur étude.

## ■ Objectifs du cours

- déterminer des liaisons équivalentes pour simplifier le graphe de structure d'un mécanisme ;
- analyser la rigidité des solutions technique ;
- choisir un modèle de solution isostatique ne demandant pas de contraintes géométriques fortes (ou permettant une analyse statique).

- 1 Introduction
- 2 Liaisons équivalentes
- 3 Degré de mobilité  $m$  d'un mécanisme
- 4 Degré d'hyperstatisme  $h$  d'un mécanisme
- 5 Formulation globale



# Introduction

- Torseur cinématique

entre deux classes d'équivalence 1 et 2 :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} p_{21} \vec{x} + q_{21} \vec{y} + r_{21} \vec{z} \\ u_{21} \vec{x} + v_{21} \vec{y} + w_{21} \vec{z} \end{array} \right\}$$

- Torseur des actions mécaniques transmissibles

par la même liaison :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y} + Z_{12} \vec{z} \\ L_{12} \vec{x} + M_{12} \vec{y} + N_{12} \vec{z} \end{array} \right\}$$

- Puissance des inter-efforts de liaison :

$$\mathcal{P}_{1 \leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} = X_{12}u_{21} + Y_{12}v_{21} + Z_{12}w_{21} + L_{12}p_{21} + M_{12}q_{21} + N_{12}r_{21}$$

# Hypothèse fondamentale

- Hypothèse fondamentale

Les modèles de théorie des mécanismes  
ne considèrent que des  
**liaisons parfaites.**

## Définition (Liaison parfaite)

Une liaison est dite parfaite si elle est sans jeu, sans frottement et indéformable.

- Conséquence

La puissance des inter-efforts de toute liaison sera toujours nulle :

$$\mathcal{P}_{1\leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{1\rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} = 0$$

# Structure d'espace vectoriel

Un torseur « vit » dans un espace qui a la structure d'un espace vectoriel de dimension 6 avec des opérations d'addition et de multiplication (par un scalaire et co-moment) bien définies.

- $\mathcal{V}_{12}$  : sous-espace vectoriel engendré par  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ 
  - dimension égale au nombre de degrés de liberté de la liaison
  - vérifie  $\dim(\mathcal{V}_{12}) \leq 5$  (6 si aucune liaison)
- $\mathcal{T}_{12}$  : sous-espace vectoriel engendré par  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}$ 
  - dimension égale au nombre d'inconnues d'AM transmissibles
  - vérifie  $\dim(\mathcal{T}_{12}) \leq 5$  (6 si encastrement)

Le co-moment  $\mathcal{P}_{1 \leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\}$  définit un produit scalaire

- nul si les deux sous-espaces vectoriels  $\mathcal{V}_{12}$  et  $\mathcal{T}_{12}$  sont **orthogonaux** ;
- définit la notion de **dualité** des torseurs cinématiques et d'AM transmissibles

$$\dim(\mathcal{V}_{12}) + \dim(\mathcal{T}_{12}) = 6$$

Si la puissance des inter-efforts de toute liaison est nulle :

$$\mathcal{P}_{1\leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{1\rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} = 0$$

alors  $\mathcal{T}_{12}$  (resp.  $\mathcal{V}_{12}$ ) est le sous-espace vectoriel dual-orthogonal à  $\mathcal{V}_{12}$  (resp.  $\mathcal{T}_{12}$ )

$$\dim(\mathcal{V}_{12}) + \dim(\mathcal{T}_{12}) = 6$$

## ● Conséquence pratique

Si une liaison  $\mathcal{L}_{12}$  possède

$$\dim(\mathcal{V}_{12}) = m$$

degrés de liberté

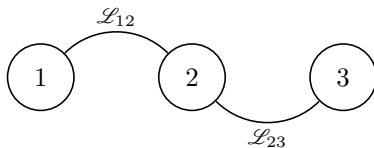
alors elle possédera

$$\dim(\mathcal{T}_{12}) = 6 - m$$

inconnues d'actions mécaniques transmissibles.

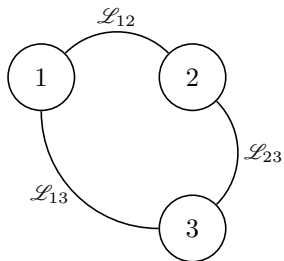
# Structure des chaînes de solides

- Chaîne ouverte

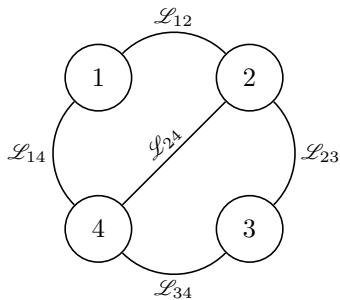


# Structure des chaînes de solides

- Chaîne fermée



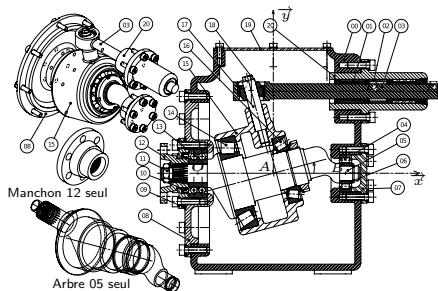
- Chaîne complexe





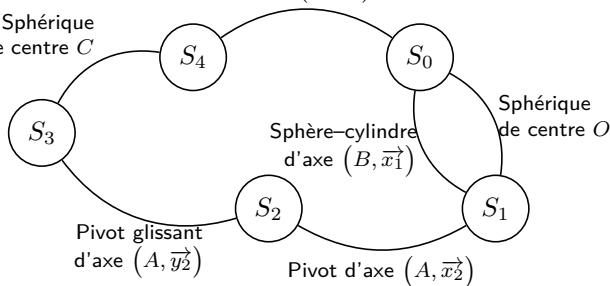
# Exemple d'application

## Système d'encapsulation



Sphérique  
de centre  $C$

Pivot glissant  
d'axe  $(D, \vec{x}_1)$





## Liaisons équivalentes

## Définition (Liaison équivalente)

Une liaison  $\mathcal{L}_{\text{éq}}$  sera dite équivalente à un ensemble de liaisons si :

- elle transmet les mêmes actions mécaniques que les liaisons du modèle initial ;
  - elle transmet les mêmes mouvements que les liaisons du modèle initial ;
  - elle a le même bilan énergétique que les liaisons du modèle initial.
- 
- 2 cas :
    - liaisons en série ;
    - liaisons en parallèle.
  - 2 approches :
    - torseur cinématique équivalent (approche cinématique)
    - torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison équivalente (approche statique)

## Définition (Liaison équivalente)

Une liaison  $\mathcal{L}_{\text{éq}}$  sera dite équivalente à un ensemble de liaisons si :

- elle transmet les mêmes actions mécaniques que les liaisons du modèle initial ;
- elle transmet les mêmes mouvements que les liaisons du modèle initial ;
- elle a le même bilan énergétique que les liaisons du modèle initial.

## • 2 cas :

- liaisons en série ;
- liaisons en parallèle.

## • 2 approches :

- torseur cinématique équivalent (approche cinématique)
- torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison équivalente (approche statique)

## Définition (Liaison équivalente)

Une liaison  $\mathcal{L}_{\text{éq}}$  sera dite équivalente à un ensemble de liaisons si :

- elle transmet les mêmes actions mécaniques que les liaisons du modèle initial ;
  - elle transmet les mêmes mouvements que les liaisons du modèle initial ;
  - elle a le même bilan énergétique que les liaisons du modèle initial.
- 
- 2 cas :
    - liaisons en série ;
    - liaisons en parallèle.
  
  - 2 approches :
    - torseur cinématique équivalent (approche cinématique)
    - torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison équivalente (approche statique)

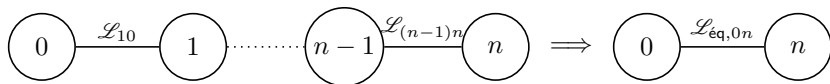
- Approche cinématique



$\mathcal{L}_{\text{eq},13}$  : liaison équivalente à l'ensemble des deux liaisons en série  $\{\mathcal{L}_{12} \cup \mathcal{L}_{23}\}$

$$\{\mathcal{V}_{\text{eq},13}\} = \{\mathcal{V}_{12}\} + \{\mathcal{V}_{23}\}$$

- Approche cinématique



$$\{\mathcal{V}_{\acute{e}q,n/0}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{V}_{i/(i-1)}\}$$

La dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $\{\mathcal{V}_{\acute{e}q,n/0}\}$  est égale au nombre de degrés de liberté de la liaison équivalente, dont on sait, grâce à la formule de Grassmann, qu'elle vérifie :

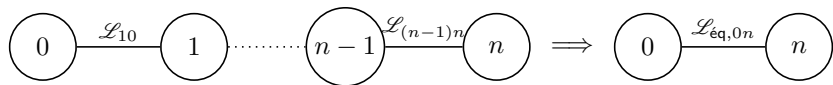
$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{\acute{e}q,0n}) \leq m = \sum_{i=1}^n \dim(\mathcal{V}_{i/(i-1)})$$

$m_u$  : nombre de mobilités utiles

$m$  : nombre de mobilités totales

$m_i = m - m_u$  : nombre de mobilités internes

- Approche cinématique



$$\{\mathcal{V}_{\acute{e}q,n/0}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{V}_{i/(i-1)}\}$$

La dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $\{\mathcal{V}_{\acute{e}q,n/0}\}$  est égale au nombre de degrés de liberté de la liaison équivalente, dont on sait, grâce à la formule de Grassmann, qu'elle vérifie :

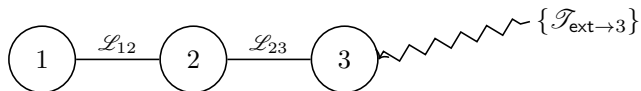
$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{\acute{e}q,0n}) \leq m = \sum_{i=1}^n \dim(\mathcal{V}_{i/(i-1)})$$

$m_u$  : nombre de mobilités utiles

$m$  : nombre de mobilités totales

$m_i = m - m_u$  : nombre de mobilités internes

- Approche statique



- 1 On isole le solide 3 :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\} + \{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow 3}\} = \{0\}$$

- 2 On isole le système  $\{2; 3\}$  :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow 3}\} = \{0\}$$

- 3 On isole le solide 3 en considérant la liaison équivalente :

$$\{\mathcal{T}_{\text{éq}, 1 \rightarrow 3}\} + \{\mathcal{T}_{\text{ext} \rightarrow 3}\} = \{0\}$$

- Approche statique (suite)

Par substitution on obtient :

$$\{\mathcal{T}_{\text{éq},1\rightarrow 3}\} = \{\mathcal{T}_{1\rightarrow 2}\} = \{\mathcal{T}_{2\rightarrow 3}\}$$

Cette condition s'interprète comme une **compatibilité en effort** :

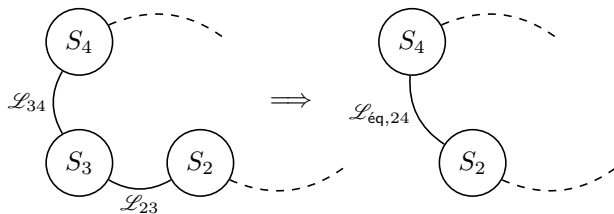
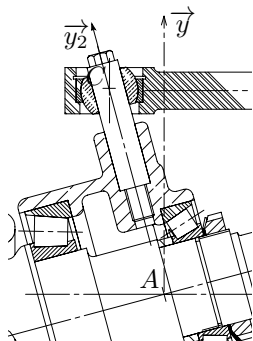
*Les composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles équivalent sont seulement celles qui peuvent être transmises simultanément par toutes les liaisons.*

Elle s'écrit pour  $n$  liaisons en série :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \{\mathcal{T}_{\text{éq},0\rightarrow n}\} = \{\mathcal{T}_{(i-1)\rightarrow i}\}$$

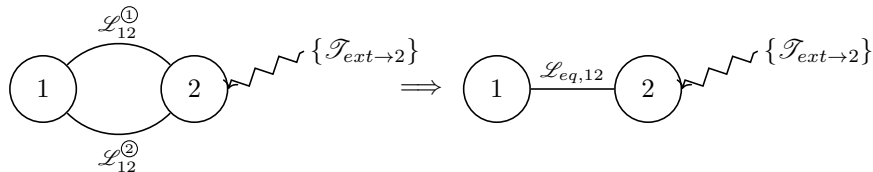
# Liaisons en séries

Application au système d'encapsulation



Liaison équivalente à l'association en série de  $\mathcal{L}_{23}$  = liaison pivot glissant d'axe (A,  $\vec{y}$ ) et  $\mathcal{L}_{34}$  = liaison sphérique de centre C ?

- Approche statique



On isole le solide 2 :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}^{(1)}\} + \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}^{(2)}\} + \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

On isole le solide 2 en tenant compte de la liaison équivalente :

$$\{\mathcal{T}_{eq,1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

En exploitant les deux relations précédentes, on démontre que :

$$\{\mathcal{T}_{eq,1 \rightarrow 2}\} = \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}^{(1)}\} + \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}^{(2)}\}$$

- Approche statique (cas général)

Pour  $n$  liaisons en parallèle on a alors :

$$\{\mathcal{T}_{\text{éq},1\rightarrow 2}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{T}_{1\rightarrow 2}^{\circledast i}\}$$

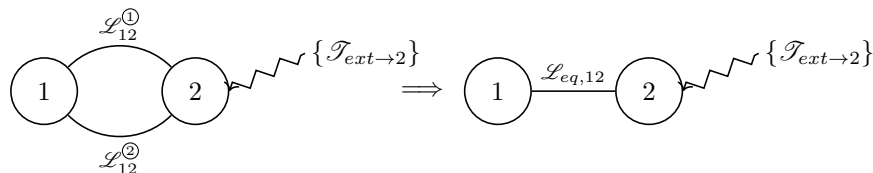
Le sous-espace vectoriel réel engendré par le torseur des actions mécaniques transmissibles  $\{\mathcal{T}_{\text{éq},1\rightarrow 2}\}$  de la liaison équivalente  $\mathcal{L}_{\text{éq},12}$  soit la somme des  $n$  sous-espaces vectoriels engendrés par les torseurs des actions mécaniques transmissibles des  $n$  liaisons en parallèle  $\mathcal{L}_{12}^{\circledast i}$ .

La différence entre la dimension de la somme directe des sous-espaces vectoriels engendrés par chacune des liaisons et la dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $\{\mathcal{T}_{\text{éq},12}\}$  définit le **degré d'hyperstatisme** de la liaison :

$$h = \sum_{i=1}^n \dim(\mathcal{T}_{12}^{\circledast i}) - \dim(\mathcal{T}_{\text{éq},12})$$

Ce degré correspond au nombre d'inconnues de liaison qui ne peuvent pas être déterminées par une simple étude statique.

- Approche cinématique

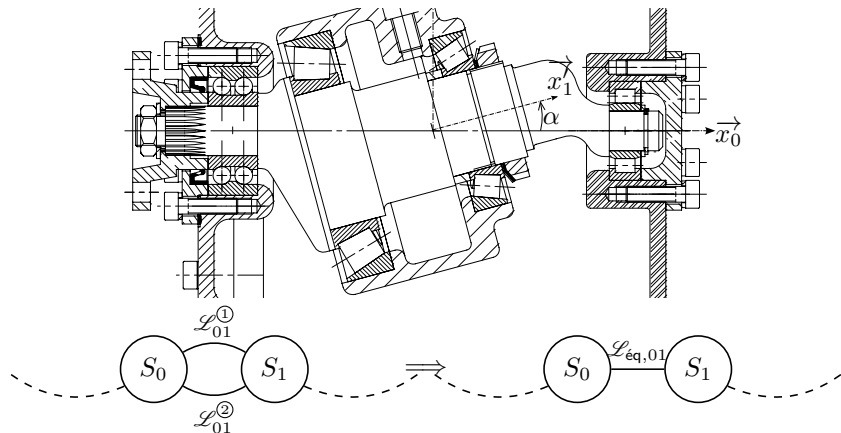


Les mobilités de la liaison équivalente doivent être compatibles avec toutes les mobilités des liaisons élémentaires :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \{\mathcal{V}_{\acute{e}q,2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^{(i)}\}$$

# Liaisons en séries

Application au système d'encapsulation



Liaison équivalente à l'association en parallèle de  $\mathcal{L}_{01}^1 =$  liaison sphérique de centre  $O$  de  $\mathcal{L}_{01}^2 =$  liaison sphère-cylindre d'axe  $(B, \vec{x}_0)$  ?

- Bilan

	Liaisons en série	Liaisons en parallèle
Approche cinématique	$\{\mathcal{V}_{\text{éq},n/0}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{V}_{i/(i-1)}\}$	$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \{\mathcal{V}_{\text{éq},1/0}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^{(i)}\}$
Approche statique	$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \{\mathcal{T}_{\text{éq},0 \rightarrow n}\} = \{\mathcal{T}_{(i-1) \rightarrow i}\}$	$\{\mathcal{T}_{\text{éq},0 \rightarrow 1}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{(i)}\}$



Degré de mobilité  $m$  d'un  
mécanisme

# Degré de mobilité $m$ d'un mécanisme

- Graphe de structure

- $n$  liaisons de  $m_k \leq 5$  inconnues cinématiques (degrés de liberté) ;
- $\gamma$  cycles indépendants ;

## Définition (Degré de mobilité)

Le degré de mobilité d'un mécanisme correspond au nombre entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que :

$$m = I_C - r_C$$

avec :

- $I_C = \sum_{k=1}^n m_k$  le nombre d'inconnues cinématiques d'un mécanisme ;
- $r_C$  le rang du système de  $E_C = 6\gamma$  équations issu de l'étude cinématique du mécanisme (fermeture cinématique).

Le degré de mobilité d'un mécanisme vérifie toujours  $m \geq I_C - E_C$ .

## ■ Degré de mobilité

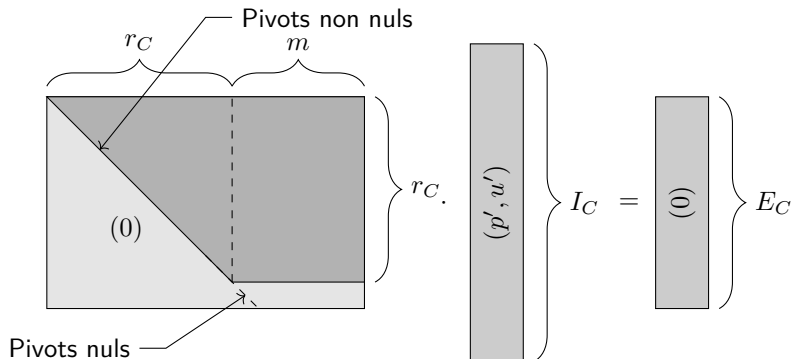
$$m = I_C - r_C \geq I_C - E_C$$

- $m$  = nombre d'inconnues cinématiques que l'on ne peut pas déterminer lors de la résolution de du système homogène de  $E_C = 6\gamma$  équations linéaires à  $I_C$  inconnues.
- $m$  = nombre de paramètres cinématiques à imposer afin d'obtenir une solution unique pour le système de  $E_C = 6\gamma$  équations linéaires de rang  $r_C$  ;
- $m = 0 \iff$  le mécanisme est *immobile*.



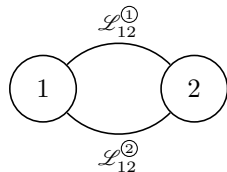
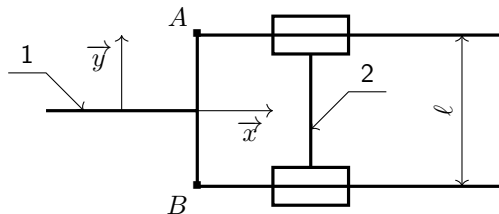
# Calcul du degré de mobilité

- 3 mettre ce système linéaire sous forme échelonnée par lignes en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss–Jordan :



$$r_C = \text{rg}(A)$$

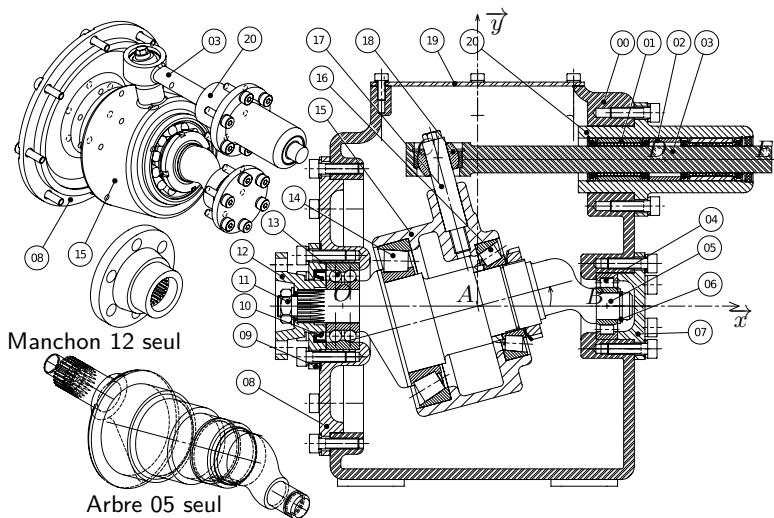
# Exemple : 2 liaisons pivot glissant d'axes parallèles



$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1}^{(1)} \right\} = \begin{Bmatrix} p_{21}^{(1)} \vec{x} \\ u_{21}^{(1)} \vec{x} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{V}_{2/1}^{(2)} \right\} = \begin{Bmatrix} p_{21}^{(2)} \vec{x} \\ u_{21}^{(2)} \vec{x} \end{Bmatrix}$$

Degré de mobilité  $m$  du mécanisme ?

# Exemple : système d'encapsulation



détails du calul

# Mobilités utiles et mobilités internes

Degré de mobilité (total) d'un mécanisme :

$$m = m_u + m_i$$

- $m_u =$  **mobilités utiles**  
nombre de relations indépendantes entre les inconnues cinématiques d'entrée(s)/sortie(s) du mécanisme ;
- $m_i =$  **mobilités internes**  
nombre de relations indépendantes entre les inconnues cinématiques des pièces internes au mécanisme. Ces mouvements sont indépendants du fonctionnement global du système.

## ■ Identification pratique

À partir de l'analyse du mécanisme

(lecture du dessin d'ensemble, schéma cinématique, vue 3D, etc.)

### ● Mobilités utiles

- identifier la chaîne cinématique de la (des) mobilité(s) utile(s) (de(s) l'actionneur(s) vers la sortie) ;
- rechercher la chaîne cinématique de réglage.

### ● Mobilités internes

- regarder autour des liaisons à plusieurs degrés de liberté (pivot glissant, sphère–cylindre, sphérique)



Approche intuitive

limitée aux mécanismes peu complexes

## ■ Identification pratique

À partir de l'analyse du mécanisme

(lecture du dessin d'ensemble, schéma cinématique, vue 3D, etc.)

### ● Mobilités utiles

- identifier la chaîne cinématique de la (des) mobilité(s) utile(s) (de(s) l'actionneur(s) vers la sortie) ;
- rechercher la chaîne cinématique de réglage.

### ● Mobilités internes

- regarder autour des liaisons à plusieurs degrés de liberté (pivot glissant, sphère–cylindre, sphérique)

 Approche intuitive

limitée aux mécanismes peu complexes

## ■ Cas particulier des chaînes ouvertes

### ● Mobilités totales

$$m = \sum_{i=1}^n \dim(\mathcal{V}_{i/(i-1)})$$

somme des mobilités des  $n$  liaisons en série

### ● Mobilités utiles

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{\text{éq},0n})$$

mobilités de la liaison équivalente aux  $n$  liaisons en série

### ● Mobilités internes

$$m_i = m - m_u$$

déduit.



Degré d'hyperstatisme  $h$  d'un  
mécanisme

# Degré d'hyperstatisme $h$ d'un mécanisme

- Graphe de structure

- $S$  solides (dont le bâti);
- $n$  liaisons de  $p_k \leq 5$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles;
- $\gamma$  cycles indépendants;

## Définition (Degré d'hyperstatisme)

Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme correspond au nombre entier  $h \in \mathbb{N}$  tel que :

$$h = I_S - r_S$$

avec :

- $I_S = \sum_{k=1}^n p_k$  le nombre d'inconnues d'actions transmissibles par les liaisons d'un mécanisme;
- $r_S$  le rang du système de  $E_S = 6(S - 1)$  équations issu de l'étude dynamique (ou statique) de chacun des  $(S - 1)$  solides (hors bâti).

Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme vérifie toujours  $h \geq I_S - E_S$ .

## ■ Degré d'hyperstatisme

$$h = I_S - r_S \geq I_S - E_S$$

- $h$  = nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles que l'on ne peut pas déterminer lors de la résolution de du système homogène de  $E_S = 6(S - 1)$  équations linéaires à  $I_S$  inconnues.
- $h$  = nombre de paramètres d'AM transmissibles à imposer afin d'obtenir une solution unique pour le système de  $E_S = 6(S - 1)$  équations linéaires de rang  $r_S$  ;
- $h = 0 \iff$  le mécanisme est *isostatique*.

# Calcul du degré d'hyperstatisme

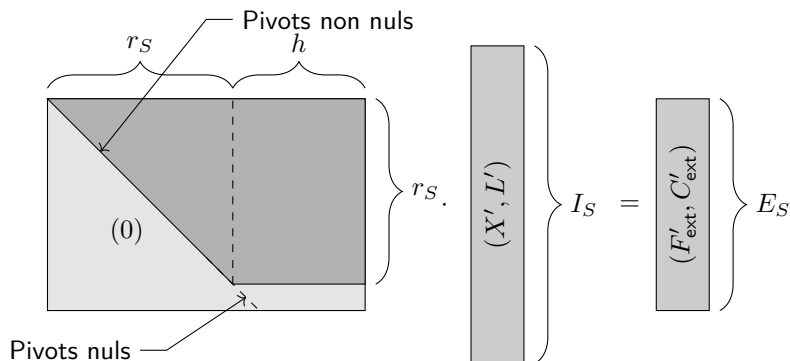
- 1 effectuer  $(S - 1)$  études dynamiques (ou statiques) indépendantes et écrire les  $6(S - 1)$  équations scalaires faisant intervenir les  $I_S$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons ;
- 2 mettre ces équations sous la forme d'un système linéaire :

$$\underbrace{E_S = 6(S - 1)}_{\text{nombre d'équations}} \left\{ \underbrace{A}_{I_S} \right\} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{matrix} (X, L) \end{matrix} \right\}}_{I_S} = \underbrace{\left\{ \begin{matrix} (F_{\text{ext}}, C_{\text{ext}}) \end{matrix} \right\}}_{E_S}$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{6(S-1), I_S}(\mathbb{R})$ .

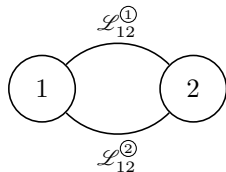
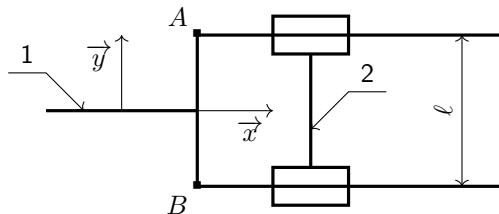
# Calcul du degré d'hyperstatisme

- 3 mettre ce système linéaire sous forme échelonnée par lignes en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss–Jordan :



$$r_S = \text{rg}(A)$$

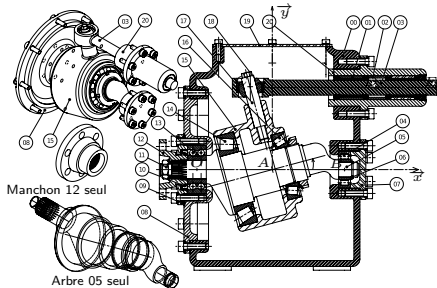
# Exemple : 2 liaisons pivot glissant d'axes parallèles



$$\left\{ \mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^{(1)} \right\} = \begin{Bmatrix} Y_{12}^{(1)} \vec{y} + Z_{12}^{(1)} \vec{z} \\ M_{12}^{(1)} \vec{y} + N_{12}^{(1)} \vec{z} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^{(2)} \right\} = \begin{Bmatrix} Y_{12}^{(2)} \vec{y} + Z_{12}^{(2)} \vec{z} \\ M_{12}^{(2)} \vec{y} + N_{12}^{(2)} \vec{z} \end{Bmatrix}$$

Degré d'hyperstatisme  $h$  du mécanisme ?

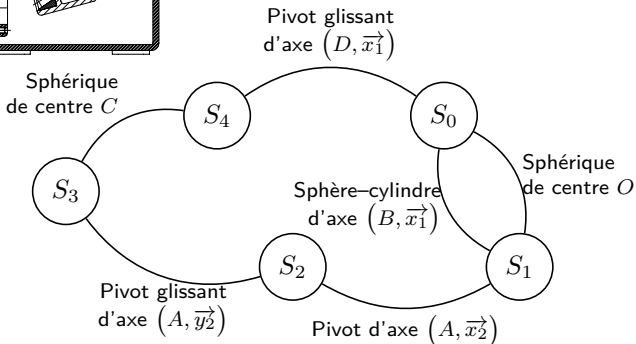
# Exemple : système d'encapsulation



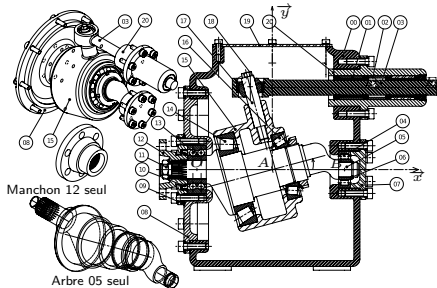
$$S = 5 \Rightarrow E_S = 24$$

$$I_S = 21$$

$$\Rightarrow h \geq 21 - 24 = -3$$



# Exemple : système d'encapsulation



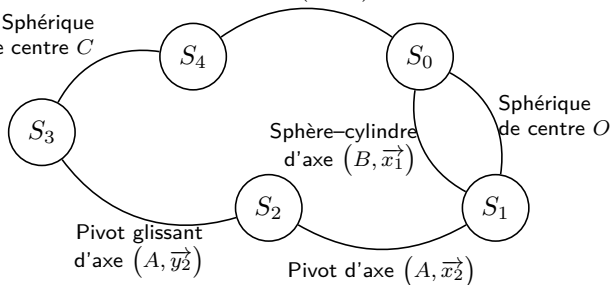
$$S = 5 \Rightarrow E_S = 24$$

$$I_S = 21$$

$$\Rightarrow h \geq 21 - 24 = -3$$

Sphérique  
de centre  $C$

Pivot glissant  
d'axe  $(D, \vec{x}_1)$



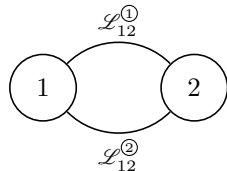
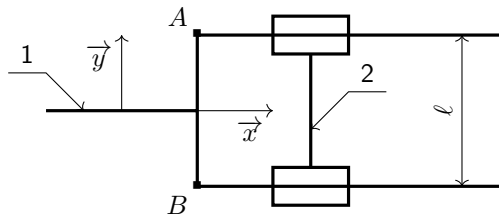
## ■ Implication technologique

Hyperstatisme  $\Rightarrow$  Rigidité

Hyperstatisme  $\Rightarrow$  Contraintes  
géométriques

Hyperstatisme  $\Rightarrow$  Réglage

# Exemple : 2 liaisons pivot glissant d'axes parallèles



$$m = 1 \quad \text{et} \quad h = 3$$

3 réglages ?

Changements de liaisons pour rendre le mécanisme isostatique ?

# Hyperstatisme et contraintes géométriques

<i>Contrainte géométrique</i>	<i>Éléments</i>	<i>Paramètres</i>
Parallélisme	droite/droite	2 angles
	droite/plan	1 angle
	plan/plan	2 angles
Perpendicularité	droite/droite (non coplanaires)	1 angle et 1 longueur
	droite/droite (coplanaires)	1 angle
	plan/plan	1 angle
Coaxialité	droite/droite	2 angles et 2 longueurs
Localisation	point/point	3 longueurs
Symétrie	plan/plan	1 angle et 1 longueur
Inclinaison	droite/droite	1 angle et 1 longueur
	droite/plan	2 angles



## Formulation globale

# Relation fondamentale

- Objectif

Établir un lien entre le degré de mobilités  $m$  d'un mécanisme et son degré d'hyperstatisme  $h$ .

Considérons un mécanisme constitué de  $S$  solides (dont le bâti) et  $L$  liaisons tels que le graphe de structure contienne  $\gamma = L - S + 1$  cycles indépendants.

## Théorème

*La relation fondamentale de la théorie des mécanismes est donnée par la relation d'équivalence :*

$$h - m = E_C - I_C = I_S - E_S$$

*liant les degrés d'hyperstatisme  $h$  et de mobilité  $m$  d'un mécanisme à ses caractéristiques cinématiques ( $I_C$  inconnues et  $E_C = 6\gamma$  équations) ou dynamiques ( $I_S$  inconnues et  $E_S = 6(S - 1)$  équations).*

## ■ Relation fondamentale

$$h - m = E_C - I_C = I_S - E_S$$

basée sur l'analyse conjointe (**dualité**) des deux systèmes d'équations, respectivement issus d'une analyse cinématique et d'une analyse statique ou dynamique.

## ● Lien entre les 2 approches

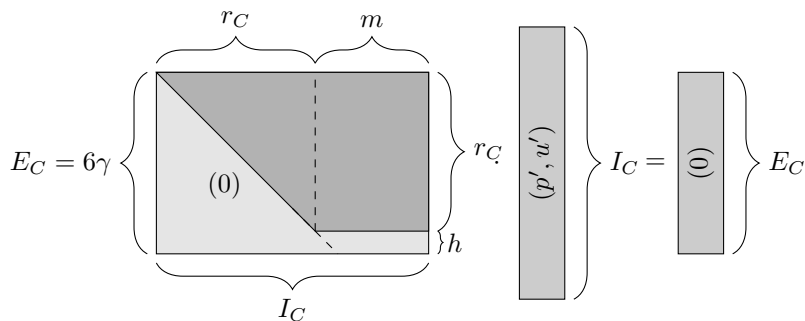
Nombre de liaisons :

$$6L = I_C + I_S = E_C + E_S$$

conduisant à un système :

- de  $6L = E_C + E_S$  équations linéaires ;
- de  $6L = I_C + I_S$  inconnues ;
- de rang  $r_C + r_S$  ;
- comprenant  $h + m$  équations « inutiles ».

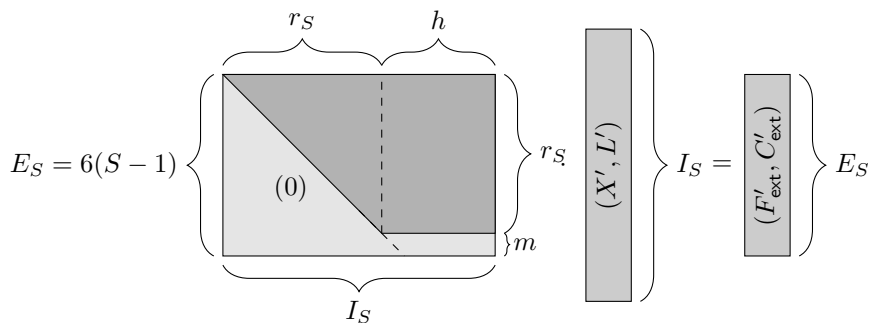
## ■ Approche cinématique



$$h = E_C - r_C$$

le degré d'hyperstatisme  $h$  limite le nombre d'équations cinématiques

## ■ Approche statique/dynamique



$$m = E_S - r_S$$

le degré de mobilité  $m$  limite le nombre d'équations statiques (ou dynamiques)

## ■ Relation fondamentale

$$h - m = E_C - I_C = I_S - E_S$$

## ■ Dualité des 2 approches

- approche cinématique :

$$h = E_C - r_C = I_S - r_S$$

le degré d'hyperstatisme  $h$  limite le nombre d'équations cinématiques

- approche statique/dynamique :

$$m = E_S - r_S = I_C - r_C$$

le degré de mobilité  $m$  limite le nombre d'équations statiques (ou dynamiques)

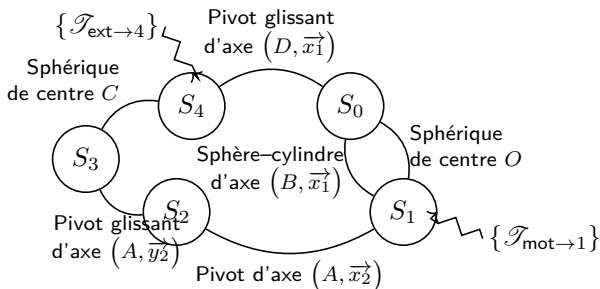
## ■ Méthode

- 1 réaliser le graphe de structure à partir d'un modèle cinématique d'architecture du mécanisme (pour ne pas perdre d'information)
- 2 déterminer le nombre d'équations et d'inconnues cinématiques  $E_C$  et  $I_C$  ;
- 3 déterminer le degré de mobilité (total) du mécanisme  $m$ , si possible par une démarche intuitive en séparant :
  - la détermination du nombre de mobilités utiles  $m_u$  lié au nombre de relations entrée(s)–sortie(s) indépendantes du mécanisme ;
  - le nombre de mobilités internes  $m_i$  lié au nombre de mouvements entre les pièces du mécanisme qui n'affectent pas le fonctionnement du mécanisme ;
- 4 en déduire le degré d'hyperstatisme du mécanisme avec la relation :

$$h = E_C - I_C + m$$

# Exemple : système d'encapsulation

## 1 Graphe de structure :



2  $E_C = 12$  équations,  $I_C = 15$  inconnues

3  $m_u = 1$  mobilité utile car une loi E-S et  $m_i = 2$  mobilités internes associées aux 2 ensembles en série avec la liaison sphérique de centre  $C$   
 $\Rightarrow m = m_u + m_i = 3$

4 degré d'hyperstatisme  $h = E_C - I_C + m = 0$



N. Mesnier, lycée international Jean Perrin, Lyon