

# Espérance et variance

Cours de É. Bouchet – PCSI

28 avril 2026

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Espérance d'une variable aléatoire</b>	<b>2</b>
1.1	Définition et premières propriétés . . . . .	2
1.2	Espérance des lois usuelles . . . . .	3
1.3	Formule de transfert et espérance du produit . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Variance, écart-type et covariance</b>	<b>4</b>
2.1	Variance, écart-type et premières propriétés . . . . .	4
2.2	Variance des lois usuelles . . . . .	4
2.3	Covariance et variables aléatoires décorréelées . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Inégalités probabilistes</b>	<b>5</b>
3.1	Inégalité de Markov . . . . .	5
3.2	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .	6

Dans tout le chapitre, on se place dans un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

# 1 Espérance d'une variable aléatoire

## 1.1 Définition et premières propriétés

### Définition 1.1 (Espérance)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle ou complexe. On appelle **espérance** de  $X$  la valeur

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Lorsque  $E(X) = 0$ , on dit que la variable est **centrée**.

**Remarque.** L'espérance donne une moyenne des valeurs atteintes par  $X$ , c'est donc un **indicateur de position**. Si on décale toutes les valeurs de  $X$ , l'espérance sera décalée en conséquence.

**Exemple.** Soit  $X$  une variable aléatoire qui vérifie  $X(\Omega) = \llbracket -1, 1 \rrbracket$ ,  $P(X = -1) = \frac{1}{4}$ ,  $P(X = 0) = \frac{1}{2}$  et  $P(X = 1) = \frac{1}{4}$ . Alors  $E(X) = -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 0$ , donc  $X$  est une variable centrée.

**Exemple.** Soit  $A$  un ensemble fini non vide et  $X$  une variable aléatoire telle que  $X \sim \mathcal{U}(A)$ . On a :

$$E(X) = \sum_{x \in A} xP(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(A)} \sum_{x \in A} x.$$

### Proposition 1.2 (Expression alternative)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle ou complexe. Alors  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ .

**Remarque.** Cette forme servira peu en exercices, mais sera très utile pour démontrer les résultats du cours.

### Proposition 1.3 (Linéarité)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles ou complexes et  $\lambda, \mu$  deux constantes, alors

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

**Remarque.** En particulier, l'espérance de la somme est égale à la somme des espérances.

**Exercice 1.** On lance deux dés, et on note  $S$  la somme de leurs résultats. Déterminer l'espérance de  $S$ .

### Proposition 1.4 (Inégalité triangulaire)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle ou complexe, alors  $|E(X)| \leq E(|X|)$ .

### Proposition 1.5 (Positivité)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle positive. Alors  $E(X) \geq 0$ .

### Proposition 1.6 (Croissance)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles. Si  $X \leq Y$ , alors  $E(X) \leq E(Y)$ .

**Remarque.** En particulier, si  $X$  est à valeurs dans un intervalle  $I$ ,  $E(X) \in I$ .

## 1.2 Espérance des lois usuelles

**Proposition 1.7** (Espérance d'une variable aléatoire constante)

Soit  $X$  une variable aléatoire constante de valeur  $m$ , alors  $E(X) = m$ .

**Proposition 1.8** (Espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli)

Soit  $p \in [0, 1]$ . Si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , alors  $E(X) = p$ .

**Remarque.** Soit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , le cas particulier de la variable indicatrice donne  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ , puisqu'on sait que  $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(P(A))$ .

**Proposition 1.9** (Espérance d'une variable aléatoire binomiale)

Soit  $p \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $E(X) = np$ .

## 1.3 Formule de transfert et espérance du produit

**Proposition 1.10** (Formule de transfert)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle ou complexe et  $g$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$ . Alors :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

**Exercice 2.** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ . Déterminer  $E(X^2)$ .

**Remarque.** La formule de transfert s'applique en particulier aux couples (ou  $n$ -uplets) de variables aléatoires. Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires et  $g$  est une fonction définie sur  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , on a par exemple :

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y)P(X = x, Y = y).$$

**Proposition 1.11** (Cas de variables aléatoires indépendantes)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles ou complexes. Si elles sont indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

**Remarque.** Ce résultat s'étend sans difficulté au cas de  $n$  variables aléatoires indépendantes.

**Remarque.** On peut utiliser ce résultat pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes : il suffit de vérifier que  $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ .

**Exercice 3.** Soient  $X_1, X_2$  et  $X_3$  indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Montrer que les variables aléatoires  $Y_1 = X_1X_2$  et  $Y_2 = X_2X_3$  ne sont pas indépendantes.

**Remarque.** Attention, ce résultat n'est pas une équivalence : la relation  $E(XY) = E(X)E(Y)$  ne suffit pas à garantir l'indépendance des variables.

**Exemple.** Soit  $Z \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$  et  $Y$  une variable aléatoire indépendante de  $Z$ . Alors,  $Y$  et  $X = ZY$  ne sont clairement pas indépendantes (elles ont même module), pourtant le lemme des coalitions la relation  $E(Z) = 0$  et l'indépendance de  $Z$  et  $Y$  donnent :

$$E(XY) = E(ZY^2) = E(Z)E(Y^2) = 0 = E(Y)E(Z)E(Y) = E(Y)E(X).$$

## 2 Variance, écart-type et covariance

### 2.1 Variance, écart-type et premières propriétés

#### Définition 2.1 (Variance, écart-type)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On appelle **variance** de  $X$  la valeur  $V(X) = E((X - E(X))^2)$  et **écart-type** de  $X$  la valeur  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ . Lorsque  $V(X) = 1$ , on dit que la variable est **réduite**.

**Remarque.** Contrairement au cas de l'espérance, le programme ne s'intéresse pas à la variance de variables aléatoires complexes. Cela permet de garantir que la variance sera toujours positive (puisque c'est l'espérance d'une fonction positive).

**Remarque.** La variance (ou l'écart-type) donnent une idée d'à quel point les valeurs de  $X$  s'écartent de leur valeur moyenne, c'est donc un **indicateur de dispersion**. Si on décale toutes les valeurs de  $X$ , la variance ne sera pas modifiée.

#### Proposition 2.2 (Variance d'une combinaison linéaire)

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $X$  une variable aléatoire réelle, alors  $V(aX + b) = a^2V(X)$ .

**Remarque.** On en déduit que  $\sigma(aX + b) = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sigma(X)$ .

**Remarque.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $\sigma(X) > 0$ . On pose  $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ , les propriétés de l'espérance et la variance donnent alors :

$$E(Z) = \frac{E(X) - E(X)}{\sigma(X)} = 0 \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{V(X)}{\sigma(X)^2} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1.$$

$Z$  est donc une variable aléatoire centrée réduite.

#### Proposition 2.3 (Formule de König-Huygens)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Alors :  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

#### Proposition 2.4 (Cas de la variance nulle)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Alors :  $V(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$ .

**Remarque.** Dans le cas d'un univers  $\Omega$  fini,  $P(X = E(X)) = 1$  signifie que  $X$  est une variable aléatoire constante, qui vaut  $E(X)$ .

### 2.2 Variance des lois usuelles

#### Proposition 2.5 (Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli)

Soit  $p \in [0, 1]$ . Si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , alors  $V(X) = p(1 - p)$ .

#### Proposition 2.6 (Variance d'une variable aléatoire binomiale)

Soit  $p \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $V(X) = np(1 - p)$ .

## 2.3 Covariance et variables aléatoires décorréliées

### Définition 2.7 (Covariance)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles. On appelle **covariance** de  $X$  et  $Y$  la valeur :

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

Lorsque  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , on dit que les variables  $X$  et  $Y$  sont **décorréliées**.

**Remarque.** En particulier,  $\text{Cov}(X, X) = V(X)$  et  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ .

### Proposition 2.8 (Formule de König-Huygens)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles. Alors :  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ .

**Remarque.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, on a déjà montré que  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , et donc  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . Deux variables aléatoires indépendantes sont donc toujours décorréliées.

La réciproque est fautive, par contre : des variables peuvent être décorréliées sans être indépendantes, pour peu que  $E(XY) = E(X)E(Y)$  (cf contre-exemple étudié plus haut).

### Proposition 2.9 (Variance d'une somme de variables aléatoires)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles. Alors :  $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$ .

En particulier, si  $X$  et  $Y$  sont décorréliées,  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

**Remarque.** Dans le cas de variables indépendantes, on a donc  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ . Ce résultat se généralise naturellement à une somme de  $n$  variables aléatoires mutuellement indépendantes.

**Remarque.** Ce résultat donne une nouvelle manière de calculer la variance de la loi binomiale.

Soit  $p \in [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . On introduit des variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  de loi  $\mathcal{B}(p)$ . Alors  $X_1 + \dots + X_n$  et  $X$  ont même loi, ce qui donne :

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p).$$

## 3 Inégalités probabilistes

### 3.1 Inégalité de Markov

#### Proposition 3.1 (Inégalité de Markov)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle positive et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , alors  $P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$ .

**Remarque.** Les majorations fournies par l'inégalité de Markov sont assez brutales : pour de petites valeurs de  $\lambda$ ,  $\frac{E(X)}{\lambda}$  peut même dépasser 1 ! C'est cependant une première approche intéressante, en attendant de savoir comment obtenir des bornes plus précises.

**Exercice 4.** Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure, indépendamment des autres. Déterminer un entier  $N$  tel que si l'entreprise a  $N$  lignes de téléphone, la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant est au plus égale à  $\frac{1}{4}$ .

## 3.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

### Proposition 3.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , alors  $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ .

**Remarque.** Ici encore, les majorations obtenues sont brutales, mais l'approche reste intéressante.

**Exercice 5.** On dispose d'une pièce truquée dont la probabilité d'obtention de pile est notée  $p \in [0, 1]$ . Pour déterminer  $p$ , on lance cette pièce  $n \in \mathbb{N}^*$  fois et on note  $F$  la fréquence d'apparition de pile ainsi obtenue. À partir de quelle valeur de  $n$  la probabilité pour que  $F$  soit une approximation de  $p$  à  $10^{-2}$  près est-elle supérieure à 0,9 ?

**Remarque.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes de même loi. On note  $m$  leur espérance et  $\sigma$  leur écart-type. Posons  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  leur valeur moyenne. Alors par indépendance et propriétés de l'espérance et la variance,

$$E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} nm = m \quad \text{et} \quad V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à  $X_1$  et à  $S_n$  donne alors respectivement : soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$P(|X_1 - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad P(|S_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Le  $n$  au dénominateur dans cette deuxième inégalité la rend bien plus intéressante : si on part du principe que la valeur de  $m$  est inconnue, plus  $n$  augmente, plus  $S_n$  représente une approximation fiable de  $m$ . Pour estimer la valeur du paramètre  $m$ , utiliser une moyenne de variables indépendantes de même loi est donc très efficace.