

Espérance et variance

Exercice 1 (★). Soit $X \sim \mathcal{U}([-3, 3])$ et $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Résultat attendu : $Y(\Omega) = \{0, 1, 4, 9\}$, $P(Y = 0) = \frac{1}{7}$, $P(Y = 1) = \frac{2}{7}$, $P(Y = 4) = \frac{2}{7}$, et $P(Y = 9) = \frac{2}{7}$.

On en déduit $E(Y) = 4$ et $V(Y) = 12$.

Exercice 2 (★). Soit $p \in [0, 1]$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$.

Pour tous i et n dans \mathbb{N}^* , on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Déterminer la loi de Y_i puis calculer $E(S_n)$.

Résultat attendu : On montre que $Y_i \sim \mathcal{B}(p^2)$ et $E(S_n) = np^2$.

Exercice 3 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on suppose que $P(X = k) = \ln(a^k)$, où a est un réel strictement positif.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que X soit une variable aléatoire.
2. Pour cette valeur, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Indication : on pourra utiliser sans démonstration la relation $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Résultat attendu : $a = \exp\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)$, $E(X) = \frac{2n+1}{3}$ et $V(X) = \frac{(n-1)(n+2)}{18}$.

Exercice 4 (★). Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. Soit $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = a^X$.
2. Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{1+X}$.

Résultat attendu : $E(Z) = (ap + 1 - p)^n$, $E(Y) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$.

Exercice 5 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à $2n$. Soit $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. On tire au hasard un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire associée au numéro obtenu. Si ce numéro est supérieur ou égal à k alors on note le numéro, sinon on remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton dont on note alors le numéro. Soit Y la variable aléatoire associée au numéro noté.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .
3. Pour quelle valeur de k l'espérance de Y est-elle maximale ?

Résultat attendu :

1. $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket)$.
2. $Y(\Omega) = \llbracket 1, 2n \rrbracket$. Si $i \geq k$, $P(Y = i) = \frac{2n+k-1}{4n^2}$, sinon $P(Y = i) = \frac{k-1}{4n^2}$.
3. L'espérance est maximale quand $k = n + 1$.

Exercice 6 (★★). On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat du test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec probabilité p . On dispose pour cela de deux méthodes :

- **Méthode 1** On analyse le sang de chacune des N personnes.
- **Méthode 2** On regroupe la population en m groupes de n individus (on a donc $m \times n = N$). On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

1. Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?
2. Soit Y la variable égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N , n et p .
3. Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000$, $n = 100$ et $p = 0,01$.
On utilisera l'approximation $0,99^{100} \simeq 0,366$.

Résultat attendu :

1. $X \sim \mathcal{B}(m, 1 - (1 - p)^n)$.
2. $E(Y) = \frac{N}{n} + N - N(1 - p)^n$.
3. La méthode 1 nécessite 1000 tests (de manière certaine), la méthode 2 en nécessite en moyenne 644 et est donc préférable.

Exercice 7 (★). Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$. On note $Y = X^2$.

1. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Commenter.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Les variables sont donc décorrélées, mais pas indépendantes.

Exercice 8 (★). On s'intéresse à $n \in \mathbb{N}^*$ voitures, qui se présentent à un péage : chaque voiture choisit au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage disponibles. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i le nombre de voitures ayant choisi la i -ème barrière.

1. Déterminer la loi de X_1 .
2. Calculer les variances de X_1 , X_2 et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2 .

Résultat attendu :

1. $X_1 \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$.
2. $V(X_1) = \frac{2n}{9}$, $V(X_2) = \frac{2n}{9}$ et $V(X_1 + X_2) = \frac{2n}{9}$.
3. $\text{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}$.

Exercice 9 (★★). Soit $p \in]0, 1[$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. A chaque instant, elle fait un bond de taille 1 vers la droite ou vers la gauche avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$. A l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n .

1. Soit U une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer une fonction f affine telle que $f(U)$ soit une variable aléatoire qui vaut 1 avec probabilité p , et -1 avec probabilité $1 - p$.
2. En déduire que X_n peut être mis sous la forme $X_n = 2S_n - n$, où S_n est une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
3. En déduire la loi de X_n , son espérance et sa variance.
4. Comment se comportent $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$? Interpréter.

Résultat attendu :

1. La fonction $t \mapsto 2t - 1$ convient
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note : $U_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k\text{-ième bond est vers la droite} \\ 0 & \text{s'il est vers la gauche} \end{cases}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$.
3. $X_n(\Omega) = \{2k - n | k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$, avec $P(X_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
De plus, par linéarité, $E(X_n) = n(2p - 1)$, et $V(X_n) = 4np(1 - p)$.
4. $V(X_n)$ tend vers $+\infty$, ce qui est logique : la plage des valeurs possibles de X_n ne fait que s'élargir.
Pour $E(X_n)$, il y a 3 cas : si $p > \frac{1}{2}$, $E(X_n) \rightarrow +\infty$; si $p < \frac{1}{2}$, $E(X_n) \rightarrow -\infty$; si $p = \frac{1}{2}$, $E(X_n) = 0$. C'est logique aussi : suivant la valeur de p , la marche aléatoire dévie vers la droite ou vers la gauche.

Exercice 10 (★). Un dé régulier est lancé 9000 fois. Minorer la probabilité d'obtenir le résultat 6 entre 1400 et 1600 fois en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Résultat attendu : On applique l'inégalité à la variable aléatoire X qui compte le nombre de 6.

Le minorant cherché est $\frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$.

Exercice 11 (★★). On lance n fois un dé non pipé à six faces. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, déterminer un minorant des valeurs de n pour lesquelles on a plus d'une chance sur deux d'obtenir une fréquence d'apparition de la valeur 1 qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur théorique $\frac{1}{6}$.

Résultat attendu : Le minorant des valeurs de n cherché est $\frac{10^5}{36}$.

Exercice 12 (Type DS). Deux urnes A et B , initialement vides, peuvent contenir chacune au plus n boules ($n \geq 1$). On s'intéresse au protocole suivant

- On choisit l'urne A avec la probabilité $\frac{1}{2}$, l'urne B sinon.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules, les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

On note R_n la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience.

1. Donner les lois de R_1 et R_2 . Justifier vos calculs.
2. Calculer l'espérance et la variance de R_1 et R_2 .
Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $n \geq 2$.
3. Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?
4. Soit k appartenant à l'univers image $R_n(\Omega)$.
 - (a) Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)$ -ième tirage l'urne A contienne $n-1$ boules et l'urne B contienne k boules.
 - (b) Donner alors la probabilité $P(R_n = k)$.
5. Vérifier que $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, 2(k+1)P(R_n = k+1) = (n+k)P(R_n = k)$.
6. Par sommation de la relation qui précède, en déduire que $E(R_n) = n - (2n-1)P(R_n = n-1)$.
7. De façon analogue, montrer que $E(R_n^2) = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$.
8. En déduire l'expression de $V(R_n)$ en fonction de n et $E(R_n)$.

Résultat attendu :

1. $R_1(\Omega) = \{0\}$, donc $P(R_1 = 0) = 1$.
 $R_2(\Omega) = \{0, 1\}$. On pose A_i (resp. B_i) l'événement « la i -ème boule va en A (resp. B) ». Alors $\forall i, P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{2}$. Or $\{R_2 = 0\} = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$, et ces deux événements sont incompatibles, donc $P(R_2 = 0) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2)$. Par indépendance des tirages, on en déduit ensuite que $P(R_2 = 0) = P(A_1)P(A_2) + P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{2}$. D'où $P(R_2 = 1) = 1 - P(R_2 = 0) = \frac{1}{2}$.
2. R_1 est une variable aléatoire certaine, donc $E(R_1) = V(R_1) = 0$. R_2 est une variable aléatoire de Bernoulli, donc $E(R_2) = \frac{1}{2}$ et $V(R_2) = \frac{1}{4}$.
3. $R_n(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ car il faut moins de n boules pour que l'urne ne soit pas pleine.
4. (a) Notons T_A cet événement. Pour qu'il soit réalisé, il faut tirer $n+k-1$ boules, en mettre $n-1$ dans A et k dans B . Il y a $\binom{n+k-1}{k}$ tirages qui réalisent cet événement, et 2^{n+k-1} tirages de $n+k-1$ boules sans contrainte. Donc par équiprobabilité, $P(T_A) = \frac{\binom{n+k-1}{k}}{2^{n+k-1}} = \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-1}{k}$.
Rmq : on pouvait aussi utiliser une loi $\mathcal{B}(n+k-1, \frac{1}{2})$.
- (b) $\{R_n = k\} = (T_A \cap A_{n+k}) \cup (T_B \cap B_{n+k})$ (en réutilisant les notations des questions précédentes) car on ne sait pas à l'avance quelle urne sera remplie. Donc $P(R_n = k) = 2P(T_A) \frac{1}{2} = P(T_A) = \frac{1}{2^{n+k-1}} \binom{n+k-1}{k}$.
5. C'est immédiat avec 4.a et b, et $\binom{n+k}{k+1} = \frac{n+k}{k+1} \binom{n+k-1}{k}$, car $k \geq 0$.
6. $E(R_n) = \sum_{k=0}^{n-1} kP(R_n = k) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)P(R_n = k+1)$ par changement d'indice. La question 5 donne alors : $2E(R_n) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+n)P(R_n = k) = n \sum_{k=0}^{n-2} P(R_n = k) + \sum_{k=0}^{n-2} kP(R_n = k)$, ce qui permet d'en déduire $2E(R_n) = n(1 - P(R_n = n-1)) + E(R_n) - (n-1)P(R_n = n-1)$. Cela donne le résultat demandé.
7. $E(R_n^2) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2P(R_n = k) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)^2P(R_n = k+1)$. On trouve comme à la question précédente :

$$\begin{aligned}
 2E(R_n^2) &= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k+n)P(R_n = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-2} k^2P(R_n = k) + (n+1) \sum_{k=0}^{n-2} kP(R_n = k) + n \sum_{k=0}^{n-2} P(R_n = k) \\
 &= E(R_n^2) - (n-1)^2P(R_n = n-1) + (n+1)(E(R_n) - (n-1)P(R_n = n-1)) + n(1 - P(R_n = n-1))
 \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient $E(R_n^2) = (n+1)E(R_n) + P(R_n = n-1)(-2n^2+n) + n = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$.

8. Par formule de Huygens, $V(R_n) = E(R_n^2) - E(R_n)^2 = (2n+1)E(R_n) - n(n-1) - E(R_n)^2$.