Produits scalaires

Cours de É. Bouchet – PCSI

29 avril 2026

Table des matières

1 Produits scalaires et normes **2**
1.1 Produits scalaires . . . 2
1.2 Norme associée à un produit scalaire . . . 3

2 Orthogonalité **4**
2.1 Premières définitions et propriétés . . . 4
2.2 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . 5
2.3 Bases orthonormées . . . 6

3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie **6**
3.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace . . . 6
3.2 Projections orthogonales et propriétés . . . 7
3.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie . . . 8

Dans ce chapitre, on se limite au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1 Produits scalaires et normes

1.1 Produits scalaires

Définition 1.1 (Produit scalaire)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application $\langle , \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui est :

- **bilinéaire** : $\forall (x, y, z) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ et $\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;
- **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$;
- **définie positive** : $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ et $(\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E)$.

Remarque. Suivant les contextes, le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ peut aussi se noter $(x|y)$ ou $x \cdot y$.

Remarque. On montre en général la symétrie avant la bilinéarité, parce qu'il suffit alors de montrer la linéarité d'un seul côté (à droite ou à gauche, au choix).

Remarque. Soit $x \in E$, la linéarité à droite donne $\langle x, 0_E \rangle = \langle x, 0 \cdot 0_E \rangle = 0 \langle x, 0_E \rangle = 0$. La linéarité à gauche donne de même $\langle 0_E, x \rangle = 0$.

Définition 1.2 (Espace préhilbertien réel, espace euclidien)

On appelle **espace préhilbertien réel** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Si l'espace vectoriel est en plus de dimension finie, on parle d'**espace euclidien**.

Proposition 1.3 (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)

L'application $\langle , \rangle \ : \big((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\big) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. En particulier, $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique est un espace euclidien.

Remarque. On retrouve les formules du lycée : pour tous vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Remarque. En utilisant les notations matricielle, le produit matriciel canonique sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

Remarque. Le produit scalaire canonique n'est pas le seul produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. Montrer que l'application $\varphi \ : \ (X, Y) \mapsto X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.4 (Produit scalaire canonique sur $C([a, b], \mathbb{R})$)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. L'application $\langle , \rangle \ : (f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Remarque. Muni du produit scalaire défini ci-dessus, $C([a, b], \mathbb{R})$ est un espace préhilbertien réel. Ce n'est par contre pas un espace euclidien car il n'est pas de dimension finie.

Remarque. Cette définition de produit scalaire s'adapte facilement à $\mathbb{R}[X]$. En effet, un polynôme qui s'annule sur $[a, b]$ s'annule en une infinité de points, donc possède une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

1.2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 1.5 (Norme associée à un produit scalaire)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On appelle **norme associée à ce produit scalaire** l'application définie de E dans $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.

Remarque. Comme un produit scalaire est défini positif, on en déduit que pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Définition 1.6 (Distance associée à une norme)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$. On appelle **distance** entre x et y le réel

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Remarque. Attention : ces notions de norme et de distance dépendent du produit scalaire associé.
Par exemple, pour le produit scalaire $(X, Y) \longrightarrow X^\top \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) Y$ sur $\mathbb{R}^2$,

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Proposition 1.7 (Identité remarquable)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

Remarque. On montre de même que $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

Proposition 1.8 (Formule de polarisation)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$, alors $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

Remarque. Connaître les valeurs de la norme permet donc de retrouver le produit scalaire associé, si nécessaire.

Remarque. En combinant les formules de $\|x + y\|^2$ et $\|x - y\|^2$, on montre aussi $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$.

Proposition 1.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$, alors $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Remarque. Si nous avions défini le produit scalaire comme au lycée, à partir de normes et d'angles, l'inégalité de Cauchy-Schwarz serait immédiate : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leqslant \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

Exercice 2. Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 3. Montrer que pour toute fonction $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant 2\sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$.

Proposition 1.10 (Inégalité triangulaire)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$, alors $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

2 Orthogonalité

2.1 Premières définitions et propriétés

Définition 2.1 (Vecteurs orthogonaux)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont **orthogonaux** et on note $x \perp y$ lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.

Remarque. Soit $x \in E$, alors $x \perp x \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0_E$, donc le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même.

Remarque. Dans ce chapitre, la notion d'orthogonalité dépend du produit scalaire pour lequel elle est définie, et ne correspond donc pas toujours à la définition géométrique vue au lycée.

Définition 2.2 (Orthogonal d'une partie)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et X une partie de E. On appelle **orthogonal** de X, noté $X^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de X :

$$X^\perp = \{y \in E | \forall x \in X, \langle y, x \rangle = 0\}.$$

Proposition 2.3 (L'orthogonal est un sous-espace vectoriel)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et X une partie de E, alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 2.4 (Autres propriétés de l'orthogonal)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et X une partie de E. Alors $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$ et $X \subset X^{\perp\perp}$.

Remarque. L'égalité $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$ signifie que pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel, il est suffisant d'exiger l'orthogonalité aux éléments d'une famille génératrice.

Remarque. Contrairement aux apparences, dans le cas général, $X^{\perp\perp} \neq X$. D'ailleurs, X n'est pas nécessairement un espace vectoriel alors que $X^{\perp\perp}$ en est un.

Exemple. Soit E un espace préhilbertien réel, alors $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$. En effet, 0_E est le seul vecteur de E orthogonal à tout vecteur.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et $X = \mathrm{Vect}((1, 1))$. Déterminer $X^\perp$.

Définition 2.5 (Familles orthogonales ou orthonormées)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs est

- **orthogonale** lorsque pour tous $(i, j) \in I^2$ tels que $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.
- **orthonormée (ou orthonormale)** lorsqu'elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires, c'est-à-dire lorsque pour tous $(i, j) \in I^2$, $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

Exemple. Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, la base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale. En effet, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Exercice 5. Pour le produit scalaire $(X, Y) \mapsto X^\top \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) Y$ sur $\mathbb{R}^2$, montrer que la base canonique n'est pas orthonormale, mais que la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ l'est.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $s_n : t \mapsto \sin(nt)$. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale dans $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Proposition 2.6 (Familles orthogonales et liberté)

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Toute famille orthogonale de vecteurs de E non nuls est libre.

Remarque. En particulier, toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre (les vecteurs étant unitaires, ils ne peuvent pas être nuls).

Proposition 2.7 (Théorème de Pythagore)

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x,y) \in E^2$, alors : $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Remarque. Si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille orthogonale de E, alors on a de même $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

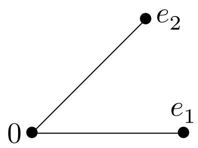
2.2 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 2.8 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

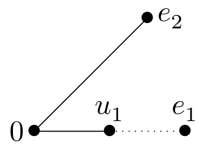
Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de E. On peut transformer $(e_1, ..., e_n)$ en une famille orthonormale de E $(u_1, ..., u_n)$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k).$$

Exemple. Soit (e_1, e_2) une famille libre de E, qu'on souhaite transformer en famille orthonormée.



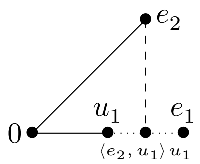
- On vérifie que $\|e_1\| \neq 0$, puis on pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$. Ainsi, u_1 est une famille orthonormale (on vient de normer le vecteur) et $\mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

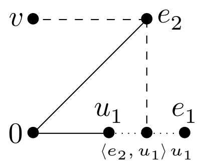


- Il faut maintenant construire un vecteur orthogonal à u_1. Pour cela, on pose $v = e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1$. On a bien :

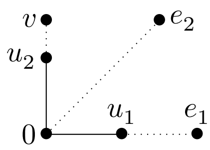
$$\langle v, u_1\rangle = \langle e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1, u_1\rangle = \langle e_2, u_1\rangle - \langle e_2, u_1\rangle \langle u_1, u_1\rangle = \langle e_2, u_1\rangle - \langle e_2, u_1\rangle 1 = 0.$$

  De plus $\mathrm{Vect}(u_1, v) = \mathrm{Vect}(u_1, e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1) = \mathrm{Vect}(u_1, e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.





- On vérifie que $\|v\| \neq 0$, puis on pose $u_2 = \frac{v}{\|v\|}$, pour créer un vecteur unitaire conservant les propriétés précédentes.



On a donc bien construit une famille orthonormale (u_1, u_2).

Remarque. La démonstration fournit une méthode de construction récursive :
poser $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ puis pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $u_k = \dfrac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i \right\|}$.

Exercice 7. On se place sur $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Déterminer une base orthonormale (P_0, P_1, P_2).

2.3 Bases orthonormées

Proposition 2.9 (Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors E possède une base orthonormale.

Proposition 2.10 (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Proposition 2.11 (Coordonnées dans une base orthonormée)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $x \in E$. Alors les coordonnées de x dans $(e_1, \dots, e_n)$ sont $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$. Autrement dit, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

Proposition 2.12 (Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in E^2$ de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans une base orthonormale B de E. Alors $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ et $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Remarque. Attention, ces formules sont fausses dans le cas général (pour des coordonnées dans une base non orthonormée).

Remarque. Sous forme matricielle, avec des vecteurs colonnes de coordonnées dans une base orthonormale X et Y, cela donne $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$ et $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

3.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Proposition 3.1 (Somme directe avec l'orthogonal)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F et $F^\perp$ sont en somme directe.

Remarque. Attention : on a montré que F et $F^\perp$ sont en somme directe, mais ils ne sont pas nécessairement supplémentaires dans E.

Définition 3.2 (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Il existe un unique supplémentaire de F dans E orthogonal à F, et c'est $F^\perp$. On l'appelle donc **le supplémentaire orthogonal** de F dans E et on note :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp.$$

Remarque. Attention : F doit être de dimension finie pour que ce résultat s'applique.

Remarque. En particulier, si E lui-même est de dimension finie : $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Remarque. Il existe un unique supplémentaire orthogonal, mais de nombreux supplémentaires « tout court ».

Proposition 3.3 (Cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $F^{\perp\perp} = F$.

Exercice 8. Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$, on s'intéresse au plan vectoriel P d'équations : $x - y - z - t = 0$ et $2x + y + z - t = 0$. Déterminer son supplémentaire orthogonal.

Définition 3.4 (Vecteur normal à un hyperplan)

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de E. Le sous-espace $H^\perp$ est une droite dont tout vecteur non nul est appelé **vecteur normal** à H.

Remarque. Soit a un vecteur normal à l'hyperplan H, alors $H = \{a\}^\perp = \{x \in E | \langle x, a \rangle = 0\}$. Donc H est le noyau de la forme linéaire non nulle $x \mapsto \langle x, a \rangle$.

3.2 Projections orthogonales et propriétés

Définition 3.5 (Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

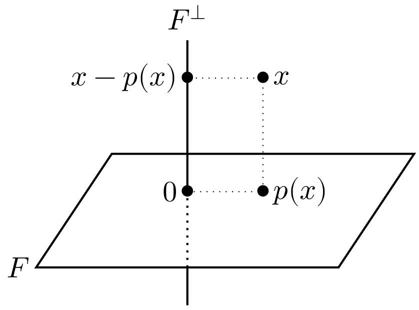
Remarque. Comme F est de dimension finie, on a bien $E = F \oplus F^\perp$, ce qui permet de définir le projecteur associé.

Proposition 3.6 (Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, ..., f_n)$ une base orthonormée de F. On note p la projection orthogonale sur F. Alors $\forall x \in E$, $p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k$.

Remarque. Quand on dispose des coordonnées dans une base orthonormée, on obtient donc facilement les projetés orthogonaux. Dans le cas contraire, on a deux stratégies de calcul :

- Première possibilité : construire (avec Gram-Schmidt) une base orthonormée et se ramener à la formule.
- Deuxième possibilité : utiliser les relations $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$.



Exercice 9. Soit $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$, qui est un sous-espace vectoriel de $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Déterminer le projeté orthogonal de id sur F pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Remarque. De manière générale, quand on se trouve dans un espace euclidien et qu'on veut projeter orthogonalement sur un sous-espace F, on préfère :

- projeter directement sur F si $\dim(F) \leqslant \dim(F^\perp)$,
- projeter d'abord sur $F^\perp$ sinon.

Exercice 10. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de E de vecteur normal a. On note p la projection orthogonale sur H. Soit $x \in E$, déterminer $p(x)$.

3.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition 3.7 (Distance à une partie)

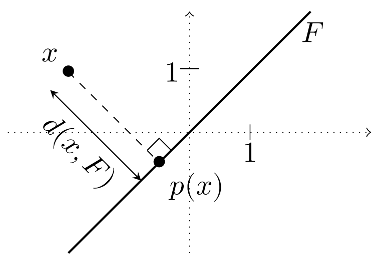
Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle **distance** de x à A, notée $d(x, A)$, le réel $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

Remarque. Intuitivement, la distance d'un vecteur x à une partie A est la plus petite distance séparant x d'un élément de A. On utilise une borne inférieure et pas un minimum pour éviter de se poser la question de l'existence de cette plus petite distance.

Proposition 3.8 (Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$. Alors la projection orthogonale de x sur F, notée $p(x)$, est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F. En particulier, $d(x, F) = \|x - p(x)\|$.

Exemple. Représentation graphique dans le cas de $\mathbb{R}^2$ et du produit scalaire usuel :



Remarque. Si E est un espace euclidien, $x - p(x)$ correspond au projeté orthogonal de x sur $F^\perp$, ce qui peut donner un calcul plus rapide.