Fonctions de deux variables

Cours de É. Bouchet – PCSI

29 avril 2026

Table des matières

Dans tout le chapitre, on munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique.

1 Introduction

1.1 Ouverts

Définition 1.1 (Boules)

Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

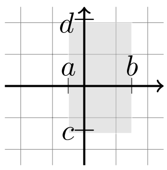
- On appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon r l'ensemble $B(A,r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 | \ \|A - M\| < r\right\}$.
- On appelle **boule fermée** de centre A et de rayon r l'ensemble $B_f(A,r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 | \ \|A - M\| \leqslant r\right\}$.

Remarque. Il est immédiat que $B(A,r) \subset B_f(A,r)$ et que si $r \leqslant s$, $B(A,r) \subset B(A,s)$.

Définition 1.2 (Ouvert)

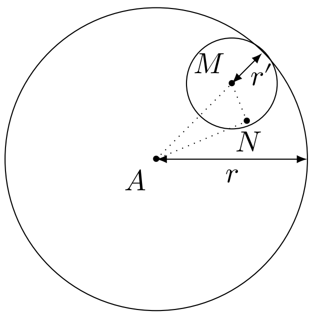
Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que D est un **ouvert** si $D = \emptyset$ ou si pour tout point M de D, il existe $r > 0$ tel que $B(M,r) \subset D$.

Exemple. Les ensembles de la forme $]a,b[\times]c,d[$ sont des ouverts.



Exemple. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, la boule ouverte $B(A,r)$ est un ouvert. En effet, si $M \in B(A,r)$, $\|A - M\| < r$ donc $r' = r - \|A - M\| > 0$. Soit $N \in B(M,r')$, alors $\|M - N\| < r'$. D'après l'inégalité triangulaire,

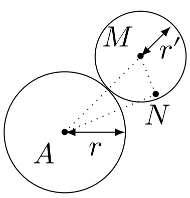
$$\|A - N\| \leqslant \|A - M\| + \|M - N\| < \|A - M\| + r' = \|A - M\| + r - \|A - M\| = r.$$



Donc $N \in B(A,r)$, ce qui donne l'inclusion $B(M,r') \subset B(A,r)$. Donc $B(A,r)$ est un ouvert.

Exemple. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, l'ensemble $\overline{B_f(A,r)}$ est un ouvert. En effet, si $M \in \overline{B_f(A,r)}$, $\|A - M\| > r$ donc $r' = \|A - M\| - r > 0$. Soit $N \in B(M,r')$, alors $\|N - M\| < r'$.
Par inégalité triangulaire, $\|A - M\| \leqslant \|A - N\| + \|N - M\|$, ce qui entraîne :

$$\|A - N\| \geqslant \|A - M\| - \|N - M\| > \|A - M\| - r' = r.$$



Donc $N \in \overline{B_f(A,r)}$, ce qui donne l'inclusion $B(M,r') \subset \overline{B_f(A,r)}$. Donc $\overline{B_f(A,r)}$ est un ouvert.

Remarque. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, la boule fermée $B_f(A,r)$ n'est par contre pas un ouvert. En effet, choisir un point M sur le cercle de centre A et de rayon r pose problème.

Remarque. Attention au vocabulaire : la notion de fermé (hors-programme) n'est pas synonyme de "non ouvert".

1.2 Définition et représentation de fonctions

Définition 1.3 (Fonction de deux variables à valeurs réelles)

On appelle **fonction de deux variables à valeurs réelles** toute fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Exercice 1. Représenter dans le plan l'ensemble de définition de la fonction $f : \begin{array}{ccc} E_1 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(3x+2y+1) \end{array}$.

Exercice 2. Représenter dans le plan l'ensemble de définition de la fonction $g : \begin{array}{ccc} E_2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2-1} \end{array}$.

Exercice 3. Représenter dans le plan l'ensemble de définition de la fonction $h : \begin{array}{ccc} E_3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\ \exp(-x^2-y^2) \end{array}$.

Définition 1.4 (Fonction polynomiale)

Une fonction de deux variables est dite **polynomiale** si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x,y) \mapsto x^m y^n$, avec m et n deux entiers naturels.

Exemple. Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2+y^2$, $(x,y) \mapsto x^2-y^2$, $(x,y) \mapsto 1-x^2$, $(x,y) \mapsto xy$ sont polynomiales.

Définition 1.5 (Surface, ligne de niveau)

Soit f une fonction réelle de deux variables définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$.

- On appelle **surface** de f sa représentation dans l'espace, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in D_f \text{ et } z = f(x,y)\}.$$

- Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** a de f la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$L_f^a = \{(x,y) \in D_f | f(x,y) = a\}.$$

Remarque. Une ligne de niveau est donc l'intersection de S_f et du plan d'équation $z = a$. Réciproquement,

$$S_f = \{L_f^a | a \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque. Deux lignes de niveau différentes ne se coupent jamais.

Remarque. Le mot ligne ne signifie pas qu'une ligne de niveau est une droite : c'est une courbe.

Exercice 4. Déterminer les lignes de niveau de la surface associée à la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2+y^2$.

Exercice 5. Déterminer les lignes de niveaux de la surface associée à la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy$.

1.3 Continuité

Définition 1.6 (Limite en un point)

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour **limite** ℓ en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } \quad \forall (x, y) \in D, \quad \|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque. Attention, cette définition n'est valable que pour les ouverts.

Remarque. $\|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \eta \iff (x, y) \in B\Big((x_0, y_0), \eta\Big)$, on peut donc reformuler cette définition à l'aide de boules.

Définition 1.7 (Continuité)

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si f admet pour limite $f(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0), et que f est **continue sur** D si f est continue en tout point de D.

Remarque. Autrement dit, f est continue en (x_0, y_0) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } \quad \forall (x, y) \in D, \quad \|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Proposition 1.8 (Opérations usuelles sur la continuité)

- Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit g une fonction continue sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit φ une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors la composée $f = \varphi \circ g$ est une fonction continue sur D.
- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions continues sur un ouvert D sont des fonctions continues sur D. De même pour le quotient si le dénominateur ne s'annule pas.

Exercice 6. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Montrer que la fonction $g : (x, y) \mapsto \exp(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Montrer que la fonction $h : (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 Dérivées partielles

2.1 Définition

Définition 2.1 (Applications partielles)

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $(x_0, y_0) \in D$. On appelle **applications partielles** de f au point (x_0, y_0) les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ obtenues à partir de f en fixant une variable.

Remarque. Les applications partielles sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

Définition 2.2 (Dérivées partielles en un point)

Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que :

- f admet **une dérivée partielle par rapport à** x en (x_0, y_0) lorsque $x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0. On note cette dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- f admet **une dérivée partielle par rapport à** y en (x_0, y_0) lorsque $y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0. On note cette dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Remarque. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Remarque. La notion de dérivée partielle est définie à l'aide de la dérivée d'une fonction réelle à une variable réelle. Les résultats usuels de dérivation peuvent donc être utilisés sur les applications partielles.
Par exemple, si f et g admettent une dérivée partielle selon x en un point alors $f + g$ et $f \times g$ aussi.

Remarque. Attention : l'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité de f en ce point.

Exercice 9. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que ses dérivées partielles existent en $(0, 0)$, mais qu'elle n'est pas continue en ce point.

Définition 2.3 (Fonctions dérivées partielles)

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont les dérivées partielles existent en tout point de D. On appelle :

- **dérivée partielle de** f **par rapport à** x la fonction définie sur D par $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.
- **dérivée partielle de** f **par rapport à** y la fonction définie sur D par $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Remarque. Contrairement aux applications partielles, les fonctions dérivées partielles sont donc des fonctions réelles de deux variables réelles.

Remarque. Dans l'écriture $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, ne pas confondre le x du ∂ (qui est une notation) avec le x du (x, y) (qui est l'abscisse x du point $(x, y) \in D$). De même avec y.

Définition 2.4 (Classe C^1)

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **de classe** C^1 sur D si elle admet des dérivées partielles et que ces dérivées partielles sont continues sur D.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par : $\forall (x, y) \in D$, $f(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$. Montrer que f est de classe C^1 sur D.

Proposition 2.5 (Propriétés usuelles de la classe C^1)

- Toute fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ est continue sur D.
- Toute fonction polynomiale est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- Toute combinaison linéaire, tout produit, tout quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^1 sur un ouvert D sont des fonctions de classe C^1 sur D.
- Soit g une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit φ une fonction de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$. Alors $\varphi \circ g$ est une fonction de classe C^1 sur D.

Remarque. Ces résultats donnent un raccourci pour traiter l'exercice précédent : ils permettent de montrer qu'une fonction est de classe C^1 sans passer par le calcul des dérivées partielles. Dans le cas de l'exercice en question, cela donnerait: $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe C^1 sur D (car polynomiales), à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composition avec la fonction ln (de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$) et quotient (dont les dénominateurs ne s'annulent pas), f est donc de classe C^1 sur D.

2.2 Développement limité à l'ordre 1

Proposition 2.6 (Développement limité à l'ordre 1)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$. Alors :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{\|(h,k)\|\to 0}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

Remarque. Cette formule donne en particulier :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \underset{\|(h,k)\|\to 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

La fonction $(h, k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$ représente donc la meilleure approximation linéaire de la fonction $(h, k) \mapsto f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ au voisinage de $(0, 0)$.

Remarque. Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on peut réécrire la formule du développement limité (et ses conséquences) en posant $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$, ce qui donne :

$$f(x, y) \underset{\|(x-x_0,y-y_0)\|\to 0}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Exercice 11. Donner la meilleure approximation linéaire de $(x, y) \mapsto e^{x+y} - 1$ au voisinage de $(0, 0)$.

Remarque. Dans le cas des fonctions réelles, on sait que si f est de classe C^1 au voisinage d'un point x_0, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$. L'équation de la droite tangente en x_0 à la courbe représentative de f est alors $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
De même dans le cas d'une fonction f de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface représentative de f sera :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

2.3 Gradient

Définition 2.7 (Gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle **gradient de** f la fonction définie de D dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ par $\nabla f : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$.

Remarque. Le développement limité à l'ordre 1 de f au point (x_0, y_0) peut donc aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &\underset{\|(h,k)\|\to 0}{=} f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)^\top \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h,k)\|) \\ &\underset{\|(h,k)\|\to 0}{=} f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (h,k)\rangle + o(\|(h,k)\|). \end{aligned}$$

Remarque. Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

3 Dérivées partielles et composées

3.1 Dérivée selon un vecteur

Définition 3.1 (Dérivée selon un vecteur)

Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On dit que f **admet une dérivée au point** (x_0, y_0) **selon le vecteur** u lorsque $t \mapsto f((x_0, y_0) + tu)$ est dérivable en 0. La dérivée en (x_0, y_0) suivant u vaut alors

$$D_u f(x_0,y_0) = \frac{d}{dt}(f((x_0,y_0)+tu))(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+tu) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

Remarque. Quand elles existent, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ correspondent aux dérivées au point (x_0, y_0) selon les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Remarque. On peut dériver selon tout vecteur non nul, mais on s'intéresse principalement aux dérivées selon des vecteurs unitaires. Cela permet de comparer plus efficacement l'évolution des variations dans les différentes directions.

Remarque. On a vu précédemment qu'une fonction pouvait admettre des dérivées partielles en un point sans être continue. Cette nouvelle définition ne lève malheureusement pas le problème : une fonction peut admettre des dérivées en (x_0, y_0) selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ sans être continue en (x_0, y_0).

Exercice 12. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer qu'elle admet des dérivées selon tout vecteur non nul en $(0, 0)$, mais qu'elle n'est pas continue en $(0, 0)$.

Proposition 3.2 (Dérivée selon un vecteur et gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors la fonction f possède une dérivée en (x_0, y_0) selon le vecteur u et on a :

$$D_u f(x_0,y_0) = \langle \nabla f(x_0,y_0), u \rangle .$$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 + y^3 - 2y$. Déterminer sa dérivée en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ selon le vecteur $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

3.2 Règles de composition

Proposition 3.3 (Règle de la chaîne)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit x et y deux fonctions de classe C^1 sur $I \subset \mathbb{R}$ et telles que $\forall t \in I$, $(x(t), y(t)) \in D$. Alors $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe C^1 sur I et :

$$\forall t \in I, \quad \frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2y$. En utilisant la règle de la chaîne, étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $h : t \mapsto f(\sqrt{t}, t^2)$.

Remarque. Soit γ l'arc défini sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. La formule de dérivation de la chaîne s'écrit aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle,$$

où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$. On peut l'interpréter comme la dérivée de f le long de l'arc γ.

Remarque. Le gradient de f en un point est orthogonal à la ligne de niveau de f passant par ce point.
En effet, pour $k \in \mathbb{R}$, si on paramétrise la ligne de niveau d'équation $f(x, y) = k$ par un arc γ (on admet l'existence d'un tel paramétrage), on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(\gamma(t)) = k$. La fonction $f \circ \gamma$ étant constante, elle est dérivable de dérivée nulle, et la formule de la remarque précédente donne alors :

$$0 = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Cela montre bien que le gradient est orthogonal au vecteur tangent de la ligne de niveau.

Proposition 3.4 (Règles de composition)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D_1 de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit φ et ψ deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert D_2 de $\mathbb{R}^2$ et telles que $\forall(u, v) \in D_2$, $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in D_1$.
Alors $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe C^1 sur D_2 et $\forall(u, v) \in D_2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v),$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v).$$

Remarque. Ici, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ représente la dérivée de f par rapport à la première variable et $\frac{\partial f}{\partial \psi}$ celle par rapport à la seconde variable. Cela permet d'écrire en version raccourcie :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, \psi)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi, \psi)\frac{\partial \psi}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, \psi)\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi, \psi)\frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Exercice 15. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(u, v) = u\cos(v)$ et $\psi(u, v) = u\sin(v)$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^3 - y$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. En utilisant la formule de composée, déterminer ses dérivées partielles.

4 Extremums

Définition 4.1 (Extremum global ou local)

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $(x_0, y_0) \in D$. On dit que :

- f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) s'il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r)$, $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$. Le maximum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.
- f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) s'il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r)$, $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$. Le minimum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(x, y) \geqslant 0 = f(0, 0)$. Donc f admet un minimum global au point $(0, 0)$.

Définition 4.2 (Point critique)

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles sur D. On dit que $(x_0, y_0) \in D$ est un **point critique** de f lorsque $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, autrement dit lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Proposition 4.3 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in D$. Si f admet un extremum local en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Remarque. Comme pour les fonctions d'une variable réelle, c'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto xy$. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f, puis que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x$. Étudier ses extremums.