

# Fonctions de deux variables

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 juin 2026

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Ouverts . . . . .	2
1.2	Définition et représentation de fonctions . . . . .	3
1.3	Continuité . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Dérivées partielles</b>	<b>6</b>
2.1	Définition . . . . .	6
2.2	Développement limité à l'ordre 1 . . . . .	7
2.3	Gradient . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Dérivées partielles et composées</b>	<b>9</b>
3.1	Dérivée selon un vecteur . . . . .	9
3.2	Règles de composition . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Extremums</b>	<b>12</b>

Dans tout le chapitre, on munit  $\mathbb{R}^2$  de sa norme euclidienne canonique.

# 1 Introduction

## 1.1 Ouverts

### Définition 1.1 (Boules)

Soit  $A \in \mathbb{R}^2$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ .

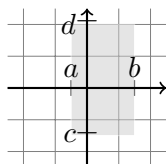
- On appelle **boule ouverte** de centre  $A$  et de rayon  $r$  l'ensemble  $B(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \|A - M\| < r\}$ .
- On appelle **boule fermée** de centre  $A$  et de rayon  $r$  l'ensemble  $B_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \|A - M\| \leq r\}$ .

**Remarque.** Il est immédiat que  $B(A, r) \subset B_f(A, r)$  et que si  $r \leq s$ ,  $B(A, r) \subset B(A, s)$ .

### Définition 1.2 (Ouvert)

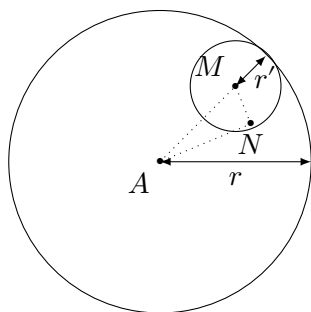
Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $D$  est un **ouvert** si  $D = \emptyset$  ou si pour tout point  $M$  de  $D$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(M, r) \subset D$ .

**Exemple.** Les ensembles de la forme  $]a, b[ \times ]c, d[$  sont des ouverts.



**Exemple.** Soit  $A \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ , la boule ouverte  $B(A, r)$  est un ouvert. En effet, si  $M \in B(A, r)$ ,  $\|A - M\| < r$  donc  $r' = r - \|A - M\| > 0$ . Soit  $N \in B(M, r')$ , alors  $\|M - N\| < r'$ . D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|A - N\| \leq \|A - M\| + \|M - N\| < \|A - M\| + r' = \|A - M\| + r - \|A - M\| = r.$$

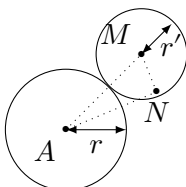


Donc  $N \in B(A, r)$ , ce qui donne l'inclusion  $B(M, r') \subset B(A, r)$ . Donc  $B(A, r)$  est un ouvert.

**Exemple.** Soit  $A \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ , l'ensemble  $\overline{B_f(A, r)}$  est un ouvert. En effet, si  $M \in \overline{B_f(A, r)}$ ,  $\|A - M\| > r$  donc  $r' = \|A - M\| - r > 0$ . Soit  $N \in B(M, r')$ , alors  $\|N - M\| < r'$ .

Par inégalité triangulaire,  $\|A - M\| \leq \|A - N\| + \|N - M\|$ , ce qui entraîne :

$$\|A - N\| \geq \|A - M\| - \|N - M\| > \|A - M\| - r' = r.$$



Donc  $N \in \overline{B_f(A, r)}$ , ce qui donne l'inclusion  $B(M, r') \subset \overline{B_f(A, r)}$ . Donc  $\overline{B_f(A, r)}$  est un ouvert.

**Remarque.** Soit  $A \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ , la boule fermée  $B_f(A, r)$  n'est par contre pas un ouvert. En effet, choisir un point  $M$  sur le cercle de centre  $A$  et de rayon  $r$  pose problème.

**Remarque.** Attention au vocabulaire : la notion de fermé (hors-programme) n'est pas synonyme de "non ouvert".

## 1.2 Définition et représentation de fonctions

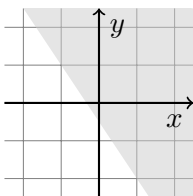
### Définition 1.3 (Fonction de deux variables à valeurs réelles)

On appelle **fonction de deux variables à valeurs réelles** toute fonction  $f$  définie sur une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

$$f : \begin{array}{l} A \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{array}$$

**Exercice 1.** Représenter dans le plan l'ensemble de définition de la fonction  $f : \begin{array}{l} E_1 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \ln(3x + 2y + 1) \end{array}$ .

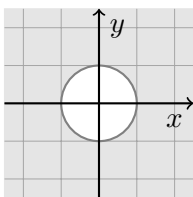
Solution : L'ensemble de définition est  $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y + 1 > 0\}$ . C'est le demi-plan situé sur le côté droit de la droite  $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$  :



On remarque au passage que c'est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2.** Représenter dans le plan l'ensemble de définition de la fonction  $g : \begin{array}{l} E_2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \end{array}$ .

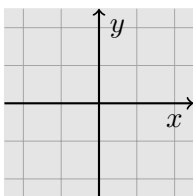
Solution : L'ensemble de définition est  $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \geq 0\}$ . Afin de caractériser cet ensemble, on remarque tout d'abord que l'ensemble  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  est le disque ouvert de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1. L'ensemble  $E_2$  est le complémentaire de  $D$  dans  $\mathbb{R}^2$  :



On remarque au passage que ce n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3.** Représenter dans le plan l'ensemble de définition de la fonction  $h : \begin{array}{l} E_3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \exp(-x^2 - y^2) \end{array}$ .

Solution : L'ensemble de définition est  $E_3 = \mathbb{R}^2$  tout entier (qui est un ouvert).



**Définition 1.4** (Fonction polynomiale)

Une fonction de deux variables est dite **polynomiale** si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto x^m y^n$ , avec  $m$  et  $n$  deux entiers naturels.

**Exemple.** Les fonctions  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ ,  $(x, y) \mapsto 1 - x^2$ ,  $(x, y) \mapsto xy$  sont polynomiales.

**Définition 1.5** (Surface, ligne de niveau)

Soit  $f$  une fonction réelle de deux variables définie sur  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ .

- On appelle **surface** de  $f$  sa représentation dans l'espace, c'est-à-dire la partie de  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f \text{ et } z = f(x, y)\}.$$

- Si  $a \in \mathbb{R}$ , on appelle **ligne de niveau**  $a$  de  $f$  la partie de  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$L_f^a = \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = a\}.$$

**Remarque.** Une ligne de niveau est donc l'intersection de  $S_f$  et du plan d'équation  $z = a$ . Réciproquement,

$$S_f = \{L_f^a \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

**Remarque.** Deux lignes de niveau différentes ne se coupent jamais.

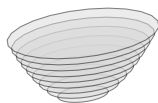
**Remarque.** Le mot ligne ne signifie pas qu'une ligne de niveau est une droite : c'est une courbe.

**Exercice 4.** Déterminer les lignes de niveau de la surface associée à la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Solution : Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = a \iff x^2 + y^2 = a \iff \|(x, y)\|^2 = a$ .

Les lignes de niveau sont donc :

- Si  $a < 0$ , l'ensemble vide.
- Si  $a = 0$ , le point  $(0, 0)$ .
- Si  $a > 0$ , le cercle d'équation de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $\sqrt{a}$ .

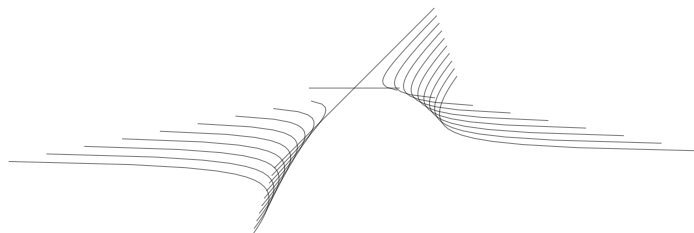


**Exercice 5.** Déterminer les lignes de niveaux de la surface associée à la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = xy$ .

Solution : Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = a \iff xy = a$ .

Les lignes de niveau sont donc :

- Si  $a = 0$ , les droites d'équation  $x = 0$  (axe des ordonnées) et  $y = 0$  (axe des abscisses).
- Sinon, les hyperboles d'équation  $y = \frac{a}{x}$ .



### 1.3 Continuité

#### Définition 1.6 (Limite en un point)

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $(x_0, y_0) \in D$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  admet pour **limite**  $\ell$  en  $(x_0, y_0)$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in D, \quad \|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

**Remarque.** Attention, cette définition n'est valable que pour les ouverts.

**Remarque.**  $\|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \eta \iff (x, y) \in B((x_0, y_0), \eta)$ , on peut donc reformuler cette définition à l'aide de boules.

#### Définition 1.7 (Continuité)

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et soit  $(x_0, y_0) \in D$ . On dit que  $f$  est **continue en**  $(x_0, y_0)$  si  $f$  admet pour limite  $f(x_0, y_0)$  en  $(x_0, y_0)$ , et que  $f$  est **continue sur**  $D$  si  $f$  est continue en tout point de  $D$ .

**Remarque.** Autrement dit,  $f$  est continue en  $(x_0, y_0)$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in D, \quad \|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

#### Proposition 1.8 (Opérations usuelles sur la continuité)

- Toute fonction polynomiale est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Soit  $g$  une fonction continue sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $\varphi$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors la composée  $f = \varphi \circ g$  est une fonction continue sur  $D$ .
- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions continues sur un ouvert  $D$  sont des fonctions continues sur  $D$ . De même pour le quotient si le dénominateur ne s'annule pas.

*Démonstration.* On revient à la définition, en adaptant le cas des fonctions à une variable. □

**Exercice 6.** Montrer que la fonction  $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Solution : La fonction  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  est polynomiale, donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ , et à valeurs positives. La fonction  $u \mapsto \sqrt{u}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Donc par composition,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 7.** Montrer que la fonction  $g : (x, y) \mapsto \exp(y)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Solution : La fonction  $(x, y) \mapsto y$  est polynomiale, donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $u \mapsto \exp(u)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Donc par composition,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 8.** Montrer que la fonction  $h : (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2+y^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Solution : La fonction  $(x, y) \mapsto xy$  est polynomiale, donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$  est polynomiale, donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ , et ne s'annule pas (ses valeurs sont toutes supérieures à 1). Donc  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 2 Dérivées partielles

### 2.1 Définition

#### Définition 2.1 (Applications partielles)

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $(x_0, y_0) \in D$ . On appelle **applications partielles** de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  les fonctions  $x \mapsto f(x, y_0)$  et  $y \mapsto f(x_0, y)$  obtenues à partir de  $f$  en fixant une variable.

**Remarque.** Les applications partielles sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

#### Définition 2.2 (Dérivées partielles en un point)

Soit  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  une fonction définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . On dit que :

- $f$  admet **une dérivée partielle par rapport à  $x$**  en  $(x_0, y_0)$  lorsque  $x \mapsto f(x, y_0)$  est dérivable en  $x_0$ . On note cette dérivée  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ .
- $f$  admet **une dérivée partielle par rapport à  $y$**  en  $(x_0, y_0)$  lorsque  $y \mapsto f(x_0, y)$  est dérivable en  $y_0$ . On note cette dérivée  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

**Remarque.** On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

**Remarque.** La notion de dérivée partielle est définie à l'aide de la dérivée d'une fonction réelle à une variable réelle. Les résultats usuels de dérivation peuvent donc être utilisés sur les applications partielles.

Par exemple, si  $f$  et  $g$  admettent une dérivée partielle selon  $x$  en un point alors  $f + g$  et  $f \times g$  aussi.

**Remarque.** Attention : l'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité de  $f$  en ce point.

**Exercice 9.** Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que ses dérivées partielles existent en  $(0, 0)$ , mais qu'elle n'est pas continue en ce point.

**Solution :** Les applications partielles de  $f$  en  $(0, 0)$  valent  $x \mapsto 0$  et  $y \mapsto 0$ . Elles sont donc dérivables (de dérivées nulles), donc les dérivées partielles existent en  $(0, 0)$  (et valent 0).

Par contre, on remarque que  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x, x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$ . La fonction  $f$  n'est donc pas continue en  $(0, 0)$ .

#### Définition 2.3 (Fonctions dérivées partielles)

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et dont les dérivées partielles existent en tout point de  $D$ . On appelle :

- **dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$**  la fonction définie sur  $D$  par  $\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ .
- **dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$**  la fonction définie sur  $D$  par  $\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

**Remarque.** Contrairement aux applications partielles, les fonctions dérivées partielles sont donc des fonctions réelles de deux variables réelles.

**Remarque.** Dans l'écriture  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , ne pas confondre le  $x$  du  $\partial$  (qui est une notation) avec le  $x$  du  $(x, y)$  (qui est l'abscisse  $x$  du point  $(x, y) \in D$ ). De même avec  $y$ .

**Définition 2.4** (Classe  $C^1$ )

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **de classe  $C^1$**  sur  $D$  si elle admet des dérivées partielles et que ces dérivées partielles sont continues sur  $D$ .

**Exercice 10.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $D = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  par :  $\forall (x, y) \in D, f(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $D$ .

**Solution :** On fixe  $y > 0$ . La fonction  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , donc  $f$  admet une dérivée partielle selon  $x$  :

$$\forall (x, y) \in D, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2}.$$

On fixe  $x > 0$ . La fonction  $y \mapsto \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , donc  $f$  admet une dérivée partielle selon  $y$  :

$$\forall (x, y) \in D, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{xy} - \frac{\ln(x)}{y^2}.$$

Les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues sur  $D$  comme composée (puisque  $\ln$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ), somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions polynômes. Donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $D$ .

**Proposition 2.5** (Propriétés usuelles de la classe  $C^1$ )

- Toute fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  est continue sur  $D$ .
- Toute fonction polynomiale est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Toute combinaison linéaire, tout produit, tout quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $D$ .
- Soit  $g$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et soit  $\varphi$  une fonction de classe  $C^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $\varphi \circ g$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $D$ .

*Démonstration.* Ces résultats découlent des propriétés de la continuité sur  $D$  et de la dérivabilité de fonctions à une variable réelle. □

**Remarque.** Ces résultats donnent un raccourci pour traiter l'exercice précédent : ils permettent de montrer qu'une fonction est de classe  $C^1$  sans passer par le calcul des dérivées partielles. Dans le cas de l'exercice en question, cela donnerait :  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  sont de classe  $C^1$  sur  $D$  (car polynomiales), à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Par composition avec la fonction  $\ln$  (de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ) et quotient (dont les dénominateurs ne s'annulent pas),  $f$  est donc de classe  $C^1$  sur  $D$ .

## 2.2 Développement limité à l'ordre 1

**Proposition 2.6** (Développement limité à l'ordre 1)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $(x_0, y_0) \in D$ . Alors :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

*Démonstration.* Hors-programme. □

**Remarque.** Cette formule donne en particulier :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

La fonction  $(h, k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$  représente donc la meilleure approximation linéaire de la fonction  $(h, k) \mapsto f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

**Remarque.** Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on peut réécrire la formule du développement limité (et ses conséquences) en posant  $h = x - x_0$  et  $k = y - y_0$ , ce qui donne :

$$f(x, y) \underset{\|(x-x_0, y-y_0)\| \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

**Exercice 11.** Donner la meilleure approximation linéaire de  $(x, y) \mapsto e^{x+y} - 1$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

Solution : Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $f(x, y) = e^{x+y} - 1$ . C'est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  (car  $(x, y) \mapsto x + y$  est polynomiale) et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y}.$$

En particulier,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ . La meilleure approximation linéaire de  $f$  au voisinage de  $(0, 0)$  est donc  $(x, y) \mapsto x + y$ .

**Remarque.** Dans le cas des fonctions réelles, on sait que si  $f$  est de classe  $C^1$  au voisinage d'un point  $x_0$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ . L'équation de la droite tangente en  $x_0$  à la courbe représentative de  $f$  est alors  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

De même dans le cas d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , l'équation du plan tangent en  $(x_0, y_0)$  à la surface représentative de  $f$  sera :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

## 2.3 Gradient

### Définition 2.7 (Gradient)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On appelle **gradient de  $f$**  la

fonction définie de  $D$  dans  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  par  $\nabla f : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$ .

**Remarque.** Le développement limité à l'ordre 1 de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  peut donc aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &\underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)^\top \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h, k)\|) \\ &\underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|). \end{aligned}$$

**Remarque.** Le gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  définit la direction dans laquelle  $f$  croît le plus vite.

### 3 Dérivées partielles et composées

#### 3.1 Dérivée selon un vecteur

**Définition 3.1** (Dérivée selon un vecteur)

Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $(x_0, y_0) \in D$  et  $u$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $f$  **admet une dérivée au point**  $(x_0, y_0)$  **selon le vecteur**  $u$  lorsque  $t \mapsto f((x_0, y_0) + tu)$  est dérivable en 0. La dérivée en  $(x_0, y_0)$  suivant  $u$  vaut alors

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{d}{dt}(f((x_0, y_0) + tu))(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + tu) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

**Remarque.** Quand elles existent, les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  correspondent aux dérivées au point  $(x_0, y_0)$  selon les vecteurs  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ .

**Remarque.** On peut dériver selon tout vecteur non nul, mais on s'intéresse principalement aux dérivées selon des vecteurs unitaires. Cela permet de comparer plus efficacement l'évolution des variations dans les différentes directions.

**Remarque.** On a vu précédemment qu'une fonction pouvait admettre des dérivées partielles en un point sans être continue. Cette nouvelle définition ne lève malheureusement pas le problème : une fonction peut admettre des dérivées en  $(x_0, y_0)$  selon tout vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$  sans être continue en  $(x_0, y_0)$ .

**Exercice 12.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Montrer qu'elle admet des dérivées selon tout vecteur non nul en  $(0, 0)$ , mais qu'elle n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

Solution : Soit  $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Alors si  $a \neq 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(a, b)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 b^2}{t^2 a} = \frac{b^2}{a}.$$

Si  $a = 0$ , on trouve de même  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(a, b)) - f(0, 0)}{t} = 0$ . Donc  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  selon tout vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ .

Cependant,  $\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x^2, x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} 1 = 1 \neq 0 = f(0, 0)$ , donc  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Proposition 3.2** (Dérivée selon un vecteur et gradient)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $(x_0, y_0) \in D$  et  $u$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ . Alors la fonction  $f$  possède une dérivée en  $(x_0, y_0)$  selon le vecteur  $u$  et on a :

$$D_u f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle.$$

*Démonstration.* Comme  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $D$ , elle admet un développement limité d'ordre 1 en  $(x_0, y_0)$  :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{\|(h, k)\| \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

En particulier, si on note  $(a, b)$  les coordonnées du vecteur  $u$ , comme  $\|(ta, tb)\| = |t| \|(a, b)\|$ ,

$$f(x_0 + ta, y_0 + tb) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)ta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)tb + o(t),$$

et donc par opérations sur les négligeabilités :

$$\frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b + o(1).$$

Un passage à la limite pour  $t \rightarrow 0$  donne alors le résultat annoncé :  $f$  possède une dérivée en  $(x_0, y_0)$  selon le vecteur  $u$  et  $D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$ .  $\square$

**Exercice 13.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^3 - 2y$ . Déterminer sa dérivée en tout point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  selon le vecteur  $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

Solution :  $f$  est polynomiale, donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Donc les dérivées partielles et selon le vecteur  $u$  existent. Un calcul donne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2.$$

On en déduit que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, D_u f(x, y) = 2x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (3y^2 - 2) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}$ .

### 3.2 Règles de composition

#### Proposition 3.3 (Règle de la chaîne)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x$  et  $y$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $I \subset \mathbb{R}$  et telles que  $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in D$ . Alors  $t \mapsto f(x(t), y(t))$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et :

$$\forall t \in I, \quad \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

*Démonstration.* Soit  $t \in I$  et  $h$  au voisinage de 0. Comme  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $D$ , elle admet un développement limité d'ordre 1 en  $(x(t), y(t))$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} \\ & \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))(x(t+h) - x(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))(y(t+h) - y(t)) + o\left(\left\| \begin{pmatrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - y(t) \end{pmatrix} \right\| \right)}{h} \\ & = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{y(t+h) - y(t)}{h} + o\left(\frac{\left\| \begin{pmatrix} x(t+h) - x(t) \\ y(t+h) - y(t) \end{pmatrix} \right\|}{h}\right) \end{aligned}$$

Or  $x$  et  $y$  sont dérivables en  $t$ , donc le membre de droite admet une limite finie quand  $h \rightarrow 0$ . Donc  $t \mapsto f(x(t), y(t))$  est dérivable au point étudié et un passage à la limite donne :

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) + 0.$$

Cette expression est celle d'une fonction continue sur  $I$ , par opérations sur les fonctions continues. Donc la fonction  $t \mapsto f(x(t), y(t))$  est bien de classe  $C^1$  sur  $I$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Exercice 14.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^3 - 2y$ . En utilisant la règle de la chaîne, étudier la dérivabilité sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $h : t \mapsto f(\sqrt{t}, t^2)$ .

Solution : On a déjà vu que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2.$$

De plus,  $t \mapsto \sqrt{t}$  et  $t \mapsto t^2$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et on connaît leurs dérivées. Donc  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et d'après la règle de la chaîne,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) = 2(\sqrt{t}) \times \frac{1}{2\sqrt{t}} + (3(t^2)^2 - 2) \times 2t = 1 + 6t^5 - 4t.$$

Rmq : si l'énoncé n'avait pas imposé l'utilisation de la règle de la chaîne, on aurait pu commencer par simplifier l'expression de  $h$  :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, h(t) = t + t^6 - 2t^2$ , ce qui permet de retrouver rapidement la valeur de la dérivée.

**Remarque.** Soit  $\gamma$  l'arc défini sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = (x(t), y(t))$ . La formule de dérivation de la chaîne s'écrit aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle,$$

où  $\gamma'(t)$  est défini par  $(x'(t), y'(t))$ . On peut l'interpréter comme la dérivée de  $f$  le long de l'arc  $\gamma$ .

**Remarque.** Le gradient de  $f$  en un point est orthogonal à la ligne de niveau de  $f$  passant par ce point. En effet, pour  $k \in \mathbb{R}$ , si on paramétrise la ligne de niveau d'équation  $f(x, y) = k$  par un arc  $\gamma$  (on admet l'existence d'un tel paramétrage), on obtient :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(\gamma(t)) = k$ . La fonction  $f \circ \gamma$  étant constante, elle est dérivable de dérivée nulle, et la formule de la remarque précédente donne alors :

$$0 = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Cela montre bien que le gradient est orthogonal au vecteur tangent de la ligne de niveau.

### Proposition 3.4 (Règles de composition)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D_1$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D_2$  de  $\mathbb{R}^2$  et telles que  $\forall (u, v) \in D_2, (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in D_1$ .

Alors  $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$  est de classe  $C^1$  sur  $D_2$  et  $\forall (u, v) \in D_2$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v),$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v).$$

**Remarque.** Ici,  $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$  représente la dérivée de  $f$  par rapport à la première variable et  $\frac{\partial f}{\partial \psi}$  celle par rapport à la seconde variable. Cela permet d'écrire en version raccourcie :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

*Démonstration.* On montre l'existence de la première dérivée partielle et sa valeur. La deuxième formule se traite de la même manière et la classe  $C^1$  découle des deux résultats.

Soit  $(u_0, v_0) \in D_2$ . La fonction partielle  $u \mapsto f(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0))$  est dérivable en  $u_0$  d'après la règle de la chaîne. Donc  $\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)$  existe et :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)) \frac{d}{du}(\varphi(u, v_0))(u_0) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)) \frac{d}{du}(\psi(u, v_0))(u_0).$$

En revenant aux définitions des dérivées partielles, on en déduit bien le résultat annoncé :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0).$$

□

**Exercice 15.** Soit  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $\varphi(u, v) = u \cos(v)$  et  $\psi(u, v) = u \sin(v)$ . Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 - y$  et  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ . En utilisant la formule de composée, déterminer ses dérivées partielles.

**Solution :** Toutes les fonctions considérées sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et des calculs directs donnent :  
 $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \cos(v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = -u \sin(v), \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = \sin(v), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) = u \cos(v), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1.$$

La formule de dérivée de la composée donne alors que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , et  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 3(u \cos(v))^2 \cos(v) - \sin(v) = 3u^2 \cos^3(v) - \sin(v),$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 3(u \cos(v))^2 (-u \sin(v)) - u \cos(v) = -3u^3 \cos^2(v) \sin(v) - u \cos(v).$$

## 4 Extremums

### Définition 4.1 (Extremum global ou local)

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $(x_0, y_0) \in D$ . On dit que :

- $f$  admet un **maximum local** en  $(x_0, y_0)$  s'il existe un réel  $r > 0$  tel que  $\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r), f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ . Le maximum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout  $(x, y) \in D$ .
- $f$  admet un **minimum local** en  $(x_0, y_0)$  s'il existe un réel  $r > 0$  tel que  $\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r), f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ . Le minimum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout  $(x, y) \in D$ .

**Exemple.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Alors  $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$ . Donc  $f$  admet un minimum global au point  $(0, 0)$ .

### Définition 4.2 (Point critique)

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et admettant des dérivées partielles sur  $D$ . On dit que  $(x_0, y_0) \in D$  est un **point critique** de  $f$  lorsque  $\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , autrement dit lorsque  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .

### Proposition 4.3 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $(x_0, y_0) \in D$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $(x_0, y_0)$ , alors  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$ .

*Démonstration.* On suppose que  $f$  admet un extremum local en  $(x_0, y_0)$ . Alors les applications partielles  $x \mapsto f(x, y_0)$  et  $y \mapsto f(x_0, y)$  admettent aussi des extremums locaux, respectivement en  $x_0$  et  $y_0$ .

Or ce sont des fonctions d'une variable réelle, dérivables aux points considérés (qui ne sont pas des bornes de l'intervalle de définition). Donc leurs dérivées s'annulent respectivement en  $x_0$  et  $y_0$ , ce qui donne bien  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ . Donc  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$ .  $\square$

**Remarque.** Comme pour les fonctions d'une variable réelle, c'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

**Exercice 16.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f : (x, y) \mapsto xy$ . Montrer que  $(0, 0)$  est un point critique de  $f$ , puis que  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(0, 0)$ .

Solution : La fonction  $f$  est polynomiale donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

Cela donne directement  $\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc  $(0, 0)$  est un point critique de  $f$ .

Par ailleurs, comme  $f(0, 0) = 0$ ,

$$\forall t > 0, \quad f(t, -t) = -t^2 < f(0, 0) < t^2 = f(t, t).$$

Comme  $(t, -t)$  et  $(t, t)$  peuvent s'approcher autant de  $(0, 0)$  qu'on le souhaite, on en déduit que  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(0, 0)$ .

**Exercice 17.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x$ . Étudier ses extremums.

Solution : La fonction  $f$  est polynomiale donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x - 1 = 0$  et  $2y = 0 \iff (x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ . Le point  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  est donc l'unique point critique de  $f$ . Or  $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ . De plus, si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x \geq x^2 - x \geq -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

où la première égalité découle de  $y^2 \geq 0$  et la dernière inégalité est obtenue par étude sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto x^2 - x$  (à détailler). Donc  $f$  admet un minimum global en  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ , qui vaut  $-\frac{1}{4}$ .