

Introduction aux nombres complexes

Cours de É. Bouchet – PCSI

29 août 2025

1 Nombres complexes

1.1 Présentation

Définition 1.1 (Nombre complexe)

On appelle **nombre complexe** tout élément z pouvant s'écrire sous la forme $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i une solution de l'équation $i^2 = -1$.

Remarque. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni de deux opérations internes, l'addition et la multiplication, dont les règles de calculs sont identiques à celles de $\mathbb{R}$, en tenant compte de l'égalité $i^2 = -1$. Les formules usuelles sur les sommes (somme de termes d'une suite géométrique, télescopage, binôme de Newton, identités remarquables...) restent valides dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Simplifier le produit $(1 + 3i)(2 - 5i)$.

Remarque. Si $z = a + ib$ avec (a, b) un couple de réels différent de $(0, 0)$, alors $z \neq 0$ et on a :

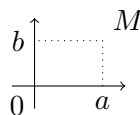
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - i^2b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Exercice 2. Simplifier le quotient $\frac{1}{3i - 2}$.

1.2 Représentation graphique

Définition 1.2 (Affixe)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, aussi appelé **plan complexe**. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et M le point du plan de coordonnées (a, b) . Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **l'affixe** du point M . C'est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



1.3 Écriture algébrique

Définition 1.3 (Partie réelle, partie imaginaire)

L'écriture du nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ avec a et b des réels est appelée **l'écriture algébrique** de z . Le réel a est appelé la **partie réelle** de z et b est sa **partie imaginaire**.

On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarque. Attention : contrairement à ce que son nom pourrait laisser penser, la partie imaginaire est un réel.

Proposition 1.4 (Unicité de l'écriture algébrique)

L'écriture algébrique d'un nombre complexe z est unique.

Proposition 1.5 (Écriture algébrique de la somme et du produit)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2), & \operatorname{Im}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2), \\ \operatorname{Re}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2), & \operatorname{Im}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Re}(z_2) \operatorname{Im}(z_1).\end{aligned}$$

Définition 1.6 (Nombre imaginaire pur)

Le complexe z est dit **imaginaire pur** si $\operatorname{Re}(z) = 0$. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Exemple. $3i$ est un imaginaire pur, $2 + 3i$ n'en est pas un.

2 Conjugaison et module

2.1 Conjugaison

Définition 2.1 (Conjugué)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Remarque. On a donc $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.

Proposition 2.2 (Lien entre conjugué et partie réelle/imaginaire)

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Remarque. En particulier, $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

Proposition 2.3 (Opérations sur le conjugué)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$. Si de plus z_2 est non nul, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

2.2 Module

Définition 2.4 (Module)

Soit $z = a + ib$ où (a, b) est un couple de réels. Le **module** de z , noté $|z|$, est le réel

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Remarque. Comme $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$, ces deux expressions sont bien égales.

Proposition 2.5 (Propriétés du module)

Pour tout nombre complexe z ,

$$|z| = |\bar{z}|, \quad |z| \geq 0 \quad \text{et} \quad |z| = 0 \iff z = 0.$$

Proposition 2.6 (Module du produit et du quotient)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, et si $z_2 \neq 0$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Proposition 2.7 (Inégalité triangulaire)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

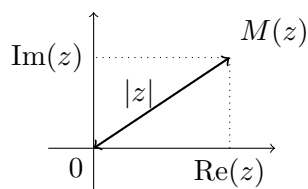
et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$.

Remarque. La condition $z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$ signifie que les vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

2.3 Interprétation géométrique du module

Proposition 2.8 (Module et distance à l'origine)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Dans le plan complexe, $|z|$ représente la distance de l'origine 0 au point $M(z)$.

**Proposition 2.9** (Module et distance entre deux points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et A, B leurs images dans le plan complexe. La valeur $|a - b|$ correspond à la distance entre les points A et B .

3 Forme trigonométrique

3.1 Nombres complexes de module 1

Définition 3.1 (Cercle trigonométrique)

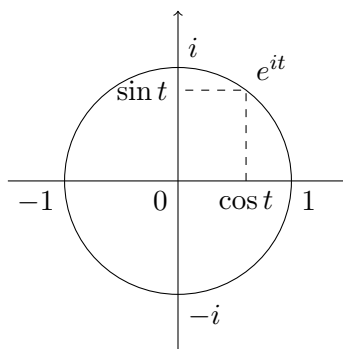
On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ s'identifie au cercle trigonométrique, de centre 0 et de rayon 1.

Définition 3.2 (e^{it} , $t \in \mathbb{R}$)

Soit $t \in \mathbb{R}$, on note e^{it} le nombre complexe $\cos(t) + i \sin(t)$.

Remarque. Attention, l'exponentielle est ici une simple notation. Notamment, il ne FAUT PAS appliquer $\ln$ à des exponentielles complexes pour les simplifier.

Remarque. Comme tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées du type $(\cos(t), \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$, on a donc $\mathbb{U} = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$.



Proposition 3.3 (Produit de termes en e^{it})

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.

Proposition 3.4 (Quotient de termes en e^{it})

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{ia}} = e^{-ia} = \frac{1}{e^{ia}}$.

Remarque. On déduit immédiatement des deux derniers résultats que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{e^{ia}}{e^{ib}} = e^{i(a-b)}$.

Proposition 3.5 (Module de termes en e^{it})

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^{it}| = 1$.

3.2 Forme trigonométrique et arguments

Définition 3.6 (Argument)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Tout réel θ tel que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$ est appelé un **argument** de z .

Remarque. Si θ est un argument de z , alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ est encore un argument de z .

Remarque. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On suppose que $a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Alors :

$$a = r(\cos \theta) \text{ et } b = r(\sin \theta),$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 3. Trouver le module et un argument de $z = 1 + i$.

Définition 3.7 (Forme trigonométrique)

Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la **forme trigonométrique** $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et θ réel. On a alors $r = |z|$ et θ est un argument de z .

Remarque. Attention, contrairement à la forme algébrique, cette écriture n'est pas unique (puisqu'on peut trouver plusieurs arguments différents).

Remarque. Soit z un nombre complexe d'argument θ et M son image dans le plan complexe. Alors θ correspond à une valeur de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radians.

