

Rudiments de logique

Exercice 1 (★). On tire 4 cartes dans un jeu. Donner la négation des affirmations suivantes :

1. Les quatre cartes sont rouges.
2. Il y a au moins deux cœurs.
3. Il n'y a aucun pique ou que des piques.
4. Il y a au moins un pique et un cœur.

Exercice 2 (★). Soit n un entier naturel. Traduire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. n est un multiple de 5.
2. n n'est pas un multiple de 3.

Exercice 3 (★). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule au moins une fois.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f est constante.
4. La fonction f est paire.

Exercice 4 (★★). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f n'est pas impaire.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
3. L'équation $f(x) = 2$ admet au moins deux solutions distinctes.
4. La fonction f n'est pas majorée.

Exercice 5 (★). Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses? On justifiera chaque réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 1) \Rightarrow (e^x \geq 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 1) \Leftarrow (e^x \geq 1)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq y) \Rightarrow (x^2 \geq y^2)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq y) \Leftarrow (x^2 \geq y^2)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x = y) \Rightarrow (\cos(x) = \cos(y))$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x = y) \Leftarrow (\cos(x) = \cos(y))$
7. $\forall m \in \mathbb{N}, (m \text{ pair}) \Rightarrow (m \text{ multiple de } 6)$
8. $\forall m \in \mathbb{N}, (m \text{ pair}) \Leftarrow (m \text{ multiple de } 6)$
9. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (\cos(x) = \cos(y)) \Rightarrow (x^2 = y^2)$
10. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (\cos(x) = \cos(y)) \Leftarrow (x^2 = y^2)$

Exercice 6 (★). Déterminer l'ensemble (noté D) des réels t tels que les nombres $\frac{t^2+2}{t^2-2}$ et $\frac{t-1}{t+1}$ sont bien définis, puis résoudre l'équation (d'inconnue $t \in D$) : $\frac{t^2+2}{t^2-2} = \frac{t-1}{t+1}$.

Exercice 7 (★★). Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

1. $\forall r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R} \text{ tel que } r = e^s - 1$.
2. $\exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, A > e^{-n}$.

Exercice 8 (★). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 3^n - 1.$$

Exercice 9 (★). Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -2v_n + 6$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-2)^n(v_0 - 2) + 2.$$

Exercice 10 (★). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 11 (★★). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 12 (★★). Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

Exercice 13 (★). Soit u la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(3 - 3^n)$.

Exercice 14 (★). Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 15 (★). Soit n_1, n_2, n_3 des entiers naturels vérifiant $n_1 + n_2 + n_3 = 30$. Montrer qu'au moins un de ces entiers est supérieur ou égal à 10.

Exercice 16 (★★).

1. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
2. Montrer que réciproquement, si le produit de deux entiers est impair, alors ces deux entiers sont impairs.

Exercice 17 (★★). Montrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 18 (★★★). Montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.

Exercice 19 (★★). Résoudre l'équation (d'inconnue $s \geq -1$) : $s + \sqrt{s+1} = 5$.

Exercice 20 (★★). Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 21 (★★★). Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Exercice 22 (Type DS). L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x \quad (E_1)$$

1. Dans cette question, on suppose que f est une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie (E_1) .
 - (a) Déterminer $f(\frac{1}{2})$.
 - (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$. On note cette égalité (E_2) .
 - (c) A l'aide de (E_1) et (E_2) , déterminer une expression de $f(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner la conclusion de l'exercice.