

Exercice 1 (★). Déterminer l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation $x + 2y = 3$. On l'écrira de deux façons, en utilisant deux paramétrages différents.

Résultat attendu : L'ensemble des solutions vaut $\left\{ \left(\lambda, \frac{3-\lambda}{2} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \{(3-2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 (★). Résoudre à l'aide des opérations élémentaires les systèmes d'inconnues réelles (x, y, z) :

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{cases} 2x + 3y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - 3z = -2 \end{cases} & 2. \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases} & 3. \begin{cases} x + y - z = 8 \\ x + 2y - 3z = 5 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases} \\ 4. \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 8z = -2 \end{cases} & 5. \begin{cases} x + 2y - 3z = 13 \\ 2x - 5y - 3z = -7 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} & 6. \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 5y - 3z = 1 \end{cases} \end{array}$$

Résultat attendu :

1. L'unique solution est $x = 2, y = -1, z = 3$.
2. L'ensemble solution est $\{(\lambda, 1-\lambda, \lambda-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(1-\lambda, \lambda, -\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(1+\lambda, -\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
3. Le système n'a pas de solution.
4. L'ensemble solution est $\{(\frac{1-\lambda}{7}, \frac{3+11\lambda}{7}, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(\frac{2-\lambda}{11}, \lambda, \frac{7\lambda-3}{11}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(\lambda, 2-11\lambda, 1-7\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
5. L'unique solution est $x = 1, y = 3, z = -2$.
6. L'ensemble solution est $\{(\lambda, 3\lambda-1, 5\lambda-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(\frac{1+\lambda}{3}, \lambda, \frac{-1+5\lambda}{3}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(\frac{2+\lambda}{5}, \frac{1+3\lambda}{5}, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3 (★). Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{1}{t} \leq -2$.

Résultat attendu : L'ensemble des solutions est $[-\frac{1}{2}, 0[$.

Exercice 4 (★). Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{1}{t} \leq 2t$.

Résultat attendu : L'ensemble des solutions est $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0[\cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.

Exercice 5 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $n \leq \sum_{k=1}^n \frac{2k+n}{k+2} \leq n^2$.

Résultat attendu : Pour $k \in [1, n]$ fixé, on montre $1 \leq \frac{2k+n}{k+2} \leq n$. Sommer ces inégalités pour k entre 1 et n donne ensuite le résultat demandé.

Exercice 6 (★). Soit u la suite vérifiant $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \in [0, 2]$.

Résultat attendu : On montre le résultat par récurrence.

Exercice 7 (★). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Encadrer au mieux $\frac{a}{b}$ (lorsque c'est possible, sinon on justifiera l'impossibilité), sachant que :

$$\begin{array}{lllll} 1. \begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ 3 \leq b \leq 5 \end{cases} & 2. \begin{cases} 1 < a \leq 2 \\ 3 < b \leq 5 \end{cases} & 3. \begin{cases} -1 \leq a \leq 2 \\ 3 \leq b \leq 5 \end{cases} & 4. \begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ -3 \leq b \leq 5 \end{cases} & 5. \begin{cases} 1 \leq a \leq 2 \\ 0 < b \leq 5 \end{cases} \end{array}$$

Résultat attendu :

$$\begin{array}{lllll} 1. \frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{3} & 2. \frac{1}{5} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3} & 3. -\frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{3} & 4. \text{ Pas de bornes } & 5. \frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} \end{array}$$

Exercice 8 (★★). Montrer que :

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ Pour tout } x \leq 0, \frac{e^x - x^2}{1 + x^2} \leq 1. & 2. \text{ Pour tout } x \geq 2, \frac{x^2 - 2}{x - 1} \geq 2. \end{array}$$

Résultat attendu :

1. On procède par majoration directe.
2. On raisonne par équivalences pour se ramener à une inégalité plus simple à étudier.

Exercice 9 (★★). Soit $a > 0$. Sans étudier les variations des fonctions suivantes, déterminer pour chacune un majorant et un minorant :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} [1, 10] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\ln(t)}{t} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\sin(t)}{1+t^2} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} [0, 3] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1-at}{2e^t-1} \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t^2 + 1) + \frac{3t}{a+t^2} \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{at^2}{1+e^t} - \frac{t^2}{a^2} \end{array}$

Résultat attendu :

1. Un minorant est 0, un majorant est $\ln(10)$.
2. Un minorant est -1 , un majorant est 1.
3. Un minorant est $\frac{1}{2e^3-1} - 3a$, un majorant est 1.
4. Un minorant est $\frac{-3}{a}$, un majorant est $\frac{3}{a} + \ln(2)$.
5. Un minorant est $-\frac{1}{a^2}$, un majorant est $\frac{a}{1+e^{-1}}$.

Exercice 10 (★★★). Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{2x+22} \geq 1-x$.

Résultat attendu : L'ensemble des solutions est $[-3, +\infty[$.

Exercice 11 (★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+1| \leq 4$.

Résultat attendu : On montre par équivalences que l'ensemble des solutions est $[-5, 3]$.

Exercice 12 (★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $7-4x \leq |x+5|$.

Résultat attendu : On montre par équivalences que l'ensemble des solutions est $[\frac{2}{5}, +\infty[$.

Exercice 13 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n |i-j|$.

Résultat attendu : $S = \dots = \sum_{j=0}^n \left(j^2 - nj + \frac{n^2+n}{2} \right) = \dots = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 14 (★). Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$.

Résultat attendu : On montre que $\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx] \leq \frac{(n+1)x}{2n}$, donc la limite vaut $\frac{x}{2}$ par théorème d'encadrement.

Exercice 15 (★★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor (2x+1)^2 \rfloor = 3$.

Résultat attendu : On montre par équivalences que l'ensemble des solutions est $\left] -\frac{3}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.

Exercice 16 (★★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{i}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Indication : introduire $B = \{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : x + \frac{i}{n} < \lfloor x \rfloor + 1\}$ et $k = \max(B)$.

Résultat attendu : Calculer séparément la somme de $i = 0$ à k , puis la somme de $i = k+1$ à $n-1$ donne pour la somme totale une valeur de $n \lfloor x \rfloor + n - k - 1$. Il faut ensuite utiliser la définition du maximum pour simplifier cette expression.

Exercice 17 (Type DS). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{4 + u_n}}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Résultat attendu :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \ll u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{4 + u_n}} \gg$.
 - On a $\frac{3}{2^0} = \frac{3}{1} = 3$ et $u_0 = 3$, donc $u_0 \leq \frac{3}{2^0}$. Donc $P(0)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Alors $0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$.
 On en déduit que $4 \leq u_n + 4$, et par croissance de la racine sur $\mathbb{R}_+$, $2 \leq \sqrt{u_n + 4}$. Comme tout est strictement positif, un passage à l'inverse donne $0 < \frac{1}{\sqrt{u_n + 4}} \leq \frac{1}{2}$.
 Or $0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$ par $P(n)$. Donc par produit d'inégalités (possible car tous les termes sont positifs),
 $0 < \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 4}} \leq \frac{3}{2^n} \times \frac{1}{2}$. Donc $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2^{n+1}}$ et $P(n+1)$ est vraie.
 Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$.
2. D'après la question 1, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{3}{2^n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2^n} = 0$ car $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$.
 Donc par théorème d'encadrement, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.