

Cours de mathématiques du mardi 6 octobre

Exercice 7. $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, x - z)$ est-elle injective ?

Solution :

Brouillon :

Premier problème : on ne sait pas tracer la fonction h . Du coup, on ne sait pas conjecturer si elle est injective ou non.

Dans ce cas, la stratégie est d'essayer de montrer qu'elle est injective. Soit on y arrive et tant mieux, soit on n'y arrive pas, et ça nous aidera à construire un contre-exemple.

Ici :

Soit (x, y, z) et (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$.

On suppose que $h(x, y, z) = h(a, b, c)$

Donc $(x + 2y, x - z) = (a + 2b, a - c)$

$$\text{Donc } \begin{cases} x + 2y = a + 2b \\ x - z = a - c \end{cases}$$

On ne sait pas si c'est vrai ou pas

Donc (?) $x = a, y = b, z = c$?? On a l'impression qu'on a trop d'équations par rapport au nombre d'inconnues pour y arriver. On se dit que la fonction ne va peut-être pas être injective, et on part sur une recherche de contre-exemple : il nous faut des valeurs concrètes de x, y, z, a, b, c tels que au moins une des égalités $x=a, y=b$ et $z=c$ est fausse.

On prend par ex $x = 1$ et $a = 0$ pour avoir des valeurs différentes mais simples.

On revient au système, qui devient :

$$\begin{cases} 1 + 2y = 2b \\ 1 - z = -c \end{cases}$$

On "complète" avec les valeurs les plus simples possibles. Par exemple, $z = 0$, donc $c = -1$.

De même, $y = 0$, donc $b = 1/2$ pour que la première égalité soit vérifiée.

Fin du brouillon

Rédaction au propre :

$$h(1, 0, 0) = (1 + 2 \cdot 0, 1 - 0) = (1, 1)$$

$$h(0, 1/2, -1) = (0 + 2 \cdot 1/2, 0 - (-1)) = (1, 1)$$

Donc $h(1, 0, 0) = h(0, 1/2, -1)$. Or $(1, 0, 0) \neq (0, 1/2, -1)$. Donc h n'est pas injective.

Proposition 3.2 (Composée de deux injections)

Soit E, F, G trois ensembles, f une injection de E dans F et g une injection de F dans G . Alors $g \circ f$ est une injection de E dans G .

Démonstration :

Soit $(x, x') \in E^2$, on suppose que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$

Donc $g(f(x)) = g(f(x'))$.

Or g est une injection. Donc $f(x) = f(x')$ (sinon, ces deux éléments ne pourraient pas avoir la même image).

Or f est une injection.

Donc $x = x'$. Donc $g \circ f$ est une injection. □

Proposition 3.3 (Injection et stricte monotonie)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et f une application strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est une injection.

Rmq : c'est cela qui nous permet de justifier des équivalences avec de la stricte monotonie. En effet, si la fonction est strictement monotone, elle est injective, donc si on l'applique, on peut la "retirer" pour revenir en arrière (ce qui justifie les équivalence).

Démonstration :

On effectue la démonstration dans le cas où f est strictement croissante sur I (le cas décroissante se traite ensuite de même).

Soit x et x' deux éléments différents de I .

- Si $x > x'$. Comme f est strictement croissante sur I , $f(x) > f(x')$.

- Si $x < x'$. De même, $f(x) < f(x')$

Donc $f(x) \neq f(x')$. Donc f est une injection. □

Exemple : la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Surjections

Définition 3.4 (Surjection)

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F . On dit que f est une **surjection** de E dans F lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent dans E :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Remarque. On peut aussi parler d'application surjective.

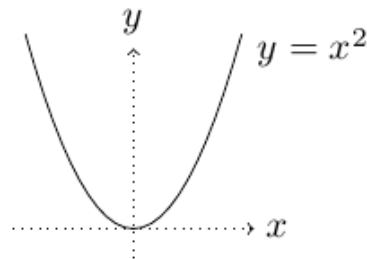
Remarque. La fonction f est une surjection si et seulement si $f(E) = F$. En particulier, toute application f définie sur un ensemble E est surjective de E dans $f(E)$.

Remarque. Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il faut donc montrer :

$$\exists y \in F \text{ tel que } \forall x \in E, f(x) \neq y,$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver un élément de F qui n'a pas d'antécédent par f .

Exemple. Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$.



On suppose que -1 a un antécédent par f . Donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = -1$. C'est absurde car un carré est toujours positif.

Donc -1 n'a pas d'antécédent par f .

Donc f n'est pas une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f est par contre surjective de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$. En effet, si $y \in [0, +\infty[$, $\sqrt{y}$ est bien défini. On a alors $f(\sqrt{y}) = y$, et donc $\sqrt{y}$ est un antécédent de y .

Exercice 8. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n + 2 \end{array}$ est-elle surjective ?

Brouillon :

On a vu dans l'exercice 6 que les valeurs atteintes par g sont toutes paires. On cherche donc un contre-exemple impair.

On suppose que 1 a un antécédent par g .

Donc $\exists n \in \mathbb{Z}, g(n) = 1$.

Donc $2n + 2 = 1$. Donc $2n = -1$.

Donc $n = -1/2$. Absurde car n est un entier.

Donc 1 n'a pas d'antécédent par g . Donc g n'est pas surjective de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 9. $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, x - z)$ est-elle surjective ?

Brouillon : comme dans le cas injectif, si on n'arrive pas à conjecturer, on essaie de montrer qu'elle est surjective et on voit si on y arrive ou pas. Si oui, on a fini, si non, ça nous aide à construire un contre-exemple.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $h(x, y, z) = (a, b)$.

Cela signifie : $(x + 2y, x - z) = (a, b)$. Donc
$$\begin{cases} x + 2y = a \\ x - z = b. \end{cases}$$

Comme on cherche un antécédent (et pas tous les antécédents possibles), on n'a pas besoin de trouver toutes les solutions du système linéaire : il suffit d'en trouver une en particulier.

On procède comme avec une résolution de système avec introduction de paramètre, sauf qu'on choisit la valeur du paramètre qui nous arrange.

Ici, par exemple, on choisit $x = 0$ (parce que ça simplifie les calculs). Alors $z = -b$ (en remplaçant dans la deuxième équation) et $y = a/2$ (en remplaçant dans la première).

Rédaction au propre :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, Penser à bien vérifier qu'on est dans l'ensemble de départ.

alors $(0, a/2, -b) \in \mathbb{R}^3$

et $h(0, a/2, -b) = (0 + 2 \cdot a/2, 0 - (-b)) = (a, b)$.

Donc h est une surjection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.5 (Composée de deux surjections)

Soit E, F, G trois ensembles, f une surjection de E dans F et g une surjection de F dans G . Alors $g \circ f$ est une surjection de E dans G .

Démonstration. Soit $y \in G$. Puisque g est surjective, il existe $z \in F$ tel que $g(z) = y$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$. Donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$.

Donc il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. Donc $g \circ f$ est surjective de E dans G . $\square$

3) Bijection

Définition 3.6 (Bijection)

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F . On dit que f est une **bijection** de E dans F lorsque f est une surjection et une injection :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Remarque. On peut aussi parler d'application bijective.

Remarque. Une fonction est donc bijective si tout élément de l'espace d'arrivée possède un et un seul antécédent.

Exemple. Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

C'est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. C'est aussi une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10. $g : \begin{matrix} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n + 2 \end{matrix}$ et $h : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y, x - z) \end{matrix}$ sont-elles bijectives ?

Solution : g n'est pas surjective, donc pas bijective. h n'est pas injective, donc pas bijective.

Rmq avant de chercher les exercices. Dans l'exercice 3, on a une question "l'application est-elle bien définie ?". Ce que cette question veut dire, c'est "Est-ce qu'en prenant des éléments de l'ensemble de départ, on arrive toujours dans l'ensemble d'arrivée ?".

Si une application n'est pas définie, il est inutile de l'étudier (elle ne peut pas être injective, surjective ou quoi que ce soit).

Exemple de rédaction pour la fonction g de l'exemple du dessus :

"Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n+2 \in \mathbb{Z}$, donc g est bien définie."