

Applications

Cours de É. Bouchet – PCSI

9 octobre 2026

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Définition, représentation	2
1.2	Image directe, image réciproque	2
1.3	Quelques cas particuliers	3
2	Opérations sur les applications	4
2.1	Restriction et prolongement	4
2.2	Composée de deux applications	4
3	Injection, surjection, bijection	5
3.1	Injection	5
3.2	Surjection	6
3.3	Bijection	6

1 Généralités

1.1 Définition, représentation

Définition 1.1 (Application, fonction, image, antécédent)

Soit E et F deux ensembles non vides. On dit que f est une **application** ou **fonction** définie de l'ensemble de départ E dans l'ensemble d'arrivée F lorsqu'elle associe à tout élément x de E un unique élément y de F . Cet élément y , noté $f(x)$, est **l'image** de x par f . L'élément x est **un antécédent** de y par f . On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F .

Remarque. Écrit en quantificateurs, cela donne : $\forall x \in E, \exists ! y \in F$ tel que $y = f(x)$.

Exemple. $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix}$ est une application de l'ensemble de départ $\mathbb{R}$ dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$.

L'image de 2 par f est 4. Les antécédents de 4 par f sont 2 et -2 .

Remarque. Attention $f(x)$ représente seulement un élément de F (la valeur de la fonction f au point x). Si on veut parler de la fonction, il faut écrire f (sans x) ou $x \mapsto f(x)$.

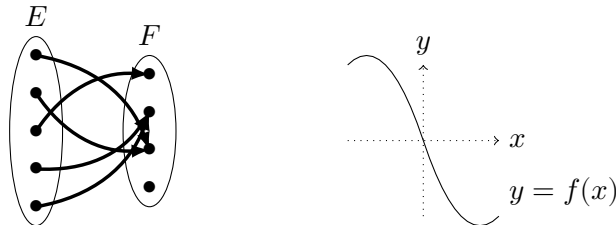
Exercice 1. Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 + 5 \end{matrix}$. Déterminer les antécédents de 6 par f .

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 6 \iff 3x^2 + 5 = 6 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Les antécédents de 6 par f sont donc $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Remarque. On peut représenter une application f de deux manières différentes, sous forme de « patates » avec x d'un côté et $f(x)$ de l'autre, ou sous forme de graphe en positionnant les points $(x, f(x))$ dans le plan :



1.2 Image directe, image réciproque

Définition 1.2 (Image directe)

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F .

- On appelle **image (directe) de f** l'ensemble $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$.
- Si $I \subset E$, on appelle **image (directe) de I par f** l'ensemble : $f(I) = \{f(x) | x \in I\}$.

Remarque. $f(I)$ contient toutes les images par f des éléments de I .

Remarque. $f(E)$ ne doit pas être confondu avec l'espace d'arrivée F : $f(E) \subset F$, mais rien n'impose que les éléments de l'espace d'arrivée soient tous atteints par l'application.

Remarque. Passer par une représentation graphique de l'application peut aider à déterminer les images directes.

Exercice 2. Soit f la fonction définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 2n$. Déterminer $f(\mathbb{Z})$ et $f(\llbracket 3, 6 \rrbracket)$ (aucune justification n'est demandée).

Solution : $f(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$ et $f(\llbracket 3, 6 \rrbracket) = \{6, 8, 10, 12\}$.

Exercice 3. Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = |x|$. Déterminer $g(\mathbb{R})$, $g([-3, -1])$ et $g([-3, 2])$ (aucune justification n'est demandée).

Solution : $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, $g([-3, -1]) =]1, 3]$ et $g([-3, 2]) = [0, 3]$.

Définition 1.3 (Image réciproque)

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F . Soit $A \subset F$. On appelle **image réciproque de A par f** l'ensemble $f^{\text{rec}}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}$.

Remarque. La notation f^{rec} est provisoire, on la remplacera par f^{-1} en fin de chapitre, après avoir évacué toute ambiguïté possible.

Remarque. $f^{\text{rec}}(A)$ contient les antécédents par f des éléments de A . En particulier, si $a \in F$, $f^{\text{rec}}(\{a\})$ contient les antécédents de a par f .

Remarque. Soit $x \in E$, $x \in f^{\text{rec}}(A) \iff f(x) \in A$.

Remarque. Passer par une représentation graphique peut aider à déterminer les images réciproques.

Exercice 4. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Déterminer $f^{\text{rec}}([-2, -1])$, $f^{\text{rec}}(\mathbb{R}_-)$, $f^{\text{rec}}([1, 4])$ (aucune justification n'est demandée).

Solution : $f^{\text{rec}}([-2, -1]) = \emptyset$, $f^{\text{rec}}(\mathbb{R}_-) = \{0\}$, $f^{\text{rec}}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

1.3 Quelques cas particuliers

Définition 1.4 (Famille d'éléments d'un ensemble)

Soit E un ensemble et I un ensemble fini ou dénombrable. On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application de I dans E . On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I .

Remarque. Plutôt que d'utiliser une notation de fonction, on utilise une notation de type $(x_i)_{i \in I}$ pour les familles d'éléments indexées par I .

Exemple. Si $I = \{1, 2, 3\}$, les éléments de $\mathbb{Z}^I$ sont les triplets d'entiers, qu'on peut écrire (n_1, n_2, n_3) .

Exemple. Si $I = \mathbb{N}$, les éléments de $\mathbb{R}^I$ sont les suites à valeurs réelles, qu'on peut écrire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut donc noter $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Définition 1.5 (Application identité)

Soit E un ensemble, on appelle **identité de E** l'application id_E définie de E dans E par :

$$\forall x \in E, \quad \text{id}_E(x) = x.$$

Remarque. L'application identité est l'application qui ne modifie aucun des éléments auxquels on l'applique. Elle semble peu utile au premier abord, mais nous servira régulièrement dans la suite de l'année pour expliciter certaines conditions.

Définition 1.6 (Fonction indicatrice)

Soit E un ensemble et A une partie de E . On appelle **fonction indicatrice de A** la fonction $\mathbb{1}_A$ définie de E dans $\{0, 1\}$ par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exemple. $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est la fonction qui renvoie 1 si on l'applique à un élément de $\mathbb{R}_+$, 0 sinon.

Si on pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

2 Opérations sur les applications

2.1 Restriction et prolongement

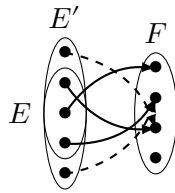
Définition 2.1 (Restriction, prolongement)

Soit E , E' et F des ensembles non vides tels que $E \subset E'$. Soit f une application de E dans F , et g une application de E' dans F . On dit que f est **la restriction** de g à E , et que g est **un prolongement** de f à E' , lorsque :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x).$$

Remarque. On note $g|_E$ la restriction de g à l'ensemble E .

Exemple. Représentation graphique des applications f et g :



Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2$.

Alors, g est la restriction de f à $[0, +\infty[$ et f est un prolongement de g à $\mathbb{R}$.

Il n'y a pas unicité du prolongement. Un autre prolongement de g à $\mathbb{R}$ est par exemple la fonction h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x^2$ si $x \geq 0$ et $h(x) = 0$ si $x < 0$.

2.2 Composée de deux applications

Définition 2.2 (Composée)

Soit D_f , A_f , D_g et A_g des ensembles non vides. Soit f une application définie de D_f dans A_f et g une application définie de D_g dans A_g . Si $A_f \subset D_g$, on appelle **composée** de f par g , notée $g \circ f$, l'application définie de D_f dans A_g par :

$$\forall x \in D_f, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Remarque. Si $x \in D_f$, on peut lui appliquer la fonction f et on obtient $f(x) \in A_f$. La condition $A_f \subset D_g$ donne alors que $f(x) \in D_g$, ce qui permet d'appliquer la fonction g par dessus. On obtient alors comme image la valeur $g(f(x)) \in A_g$.

Remarque. Attention, $g \circ f$ peut être défini sans que $f \circ g$ le soit. En effet, les conditions de bonne définition sont différentes : il faut $A_f \subset D_g$ pour définir $g \circ f$ et $A_g \subset D_f$ pour définir $f \circ g$.

Exercice 5. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$. Les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bien définies ? Si oui, déterminer leur expression.

Solution : $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, donc $g \circ f$ est bien définie. De plus $g \circ f$ a pour ensemble de départ $[0, +\infty[$ et pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in [0, +\infty[, g \circ f(x) = g(x^2) = (x^2)^3 = x^6$.

Par contre, $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R}_+$ donc $f \circ g$ n'est pas définie.

3 Injection, surjection, bijection

3.1 Injection

Définition 3.1 (Injection)

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F . On dit que f est une **injection** de E dans F lorsque deux éléments de E distincts ont des images distinctes dans F :

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x' \text{ (contraposée).}$$

Remarque. On peut aussi parler d'application injective.

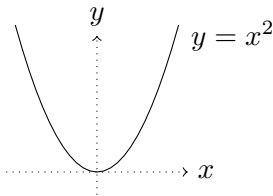
Remarque. Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il faut donc montrer :

$$\exists (x, x') \in E^2 \text{ tels que } x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x'),$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver deux éléments distincts de E qui ont la même image par f .

Remarque. Une fonction f est injective quand les éléments de l'espace d'arrivée ont au plus un antécédent.

Exemple. Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$.



f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car $f(-2) = 4 = f(2)$.

f est par contre injective de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, on suppose que $f(x) = f(y)$. Alors $x^2 = y^2$, donc par passage à la racine $|x| = |y|$ et par positivité de x et y , $x = y$.

Exercice 6. $g : \begin{matrix} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n + 2 \end{matrix}$ est-elle injective ?

Solution : Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons que $g(n_1) = g(n_2)$. Alors $2n_1 + 2 = 2n_2 + 2$, et donc $n_1 = n_2$. Donc g est injective.

Exercice 7. $h : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y, x - z) \end{matrix}$ est-elle injective ?

Solution : h n'est pas injective car $h((2, -1, 2)) = (0, 0) = h((0, 0, 0))$.

Proposition 3.2 (Composée de deux injections)

Soit E, F, G trois ensembles, f une injection de E dans F et g une injection de F dans G . Alors $g \circ f$ est une injection de E dans G .

Démonstration. Soit $(x, x') \in E^2$, on suppose que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Donc $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque g est injective, on en déduit $f(x) = f(x')$. Et puisque f est injective, on en déduit $x = x'$. Donc $g \circ f$ est injective de E dans G . $\square$

Proposition 3.3 (Injection et stricte monotonie)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et f une application strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est une injection.

Démonstration. On montre le résultat dans le cas où f est strictement croissante, la preuve fonctionne de même dans le cas strictement décroissant. Soit x et x' deux éléments distincts de I .

- Si $x < x'$, la stricte croissance de f donne $f(x) < f(x')$.
- Si $x' < x$, la stricte croissance de f donne $f(x') < f(x)$.

Dans tous les cas, $f(x) \neq f(x')$. Deux éléments distincts ont des images par f distinctes, donc f est une injection. $\square$

Exemple. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3.2 Surjection

Définition 3.4 (Surjection)

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F . On dit que f est une **surjection** de E dans F lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent dans E :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Remarque. On peut aussi parler d'application surjective.

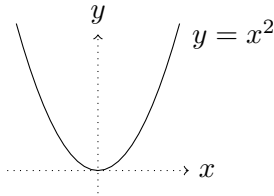
Remarque. La fonction f est une surjection si et seulement si $f(E) = F$. En particulier, toute application f définie sur un ensemble E est surjective de E dans $f(E)$.

Remarque. Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il faut donc montrer :

$$\exists y \in F \text{ tel que } \forall x \in E, f(x) \neq y,$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver un élément de F qui n'a pas d'antécédent par f .

Exemple. Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$.



f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car -1 n'admet aucun antécédent par f .

f est par contre surjective de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$. En effet, si $y \in [0, +\infty[$, $\sqrt{y}$ est bien défini. On a alors $f(\sqrt{y}) = y$, et donc $\sqrt{y}$ est un antécédent de y .

Exercice 8. $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto 2n + 2$ est-elle surjective ?

Solution : Montrons que g n'atteint pas les termes impairs, et 1 en particulier. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(n) = 1$. Alors $2n + 2 = 1$, donc $n = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$: absurde. Donc 1 n'a pas d'antécédent par g . Donc g n'est pas surjective.

Exercice 9. $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, x - z)$ est-elle surjective ?

Solution : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors $h((\alpha, 0, \alpha - \beta)) = (\alpha + 2 \times 0, \alpha - (\alpha - \beta)) = (\alpha, \beta)$. Comme $(\alpha, 0, \alpha - \beta) \in \mathbb{R}^3$, h est surjective.

Proposition 3.5 (Composée de deux surjections)

Soit E, F, G trois ensembles, f une surjection de E dans F et g une surjection de F dans G . Alors $g \circ f$ est une surjection de E dans G .

Démonstration. Soit $y \in G$. Puisque g est surjective, il existe $z \in F$ tel que $g(z) = y$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$. Donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$.

Donc il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. Donc $g \circ f$ est surjective de E dans G . □

3.3 Bijection

Définition 3.6 (Bijection)

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F . On dit que f est une **bijection** de E dans F lorsque f est une surjection et une injection :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Remarque. On peut aussi parler d'application bijective.

Remarque. Une fonction est donc bijective si tout élément de l'espace d'arrivée possède un et un seul antécédent.

Exemple. Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

C'est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. C'est aussi une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10. $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ et $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont-elles bijectives ?
 $n \mapsto 2n + 2$ et $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, x - z)$

Solution : g n'est pas surjective, donc pas bijective. h n'est pas injective, donc pas bijective.

Définition 3.7 (Application réciproque)

Si f est une bijection de E dans F , on peut associer à tout $y \in F$ son antécédent unique $x \in E$. On définit ainsi l'**application réciproque** f^{-1} de f .

Remarque. Attention, la notation f^{-1} n'a rien à voir avec $\frac{1}{f}$. Pour éviter toute confusion, on évitera d'ailleurs d'utiliser des puissances négatives pour représenter des quotients de fonctions.

Proposition 3.8 (Lien entre f et f^{-1})

Soit $x \in E, y \in F, f$ une application bijective de E dans F et f^{-1} l'application réciproque de f . Alors

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Démonstration. On montre séparément les deux implications.

- On suppose que $x = f^{-1}(y)$, alors x est un antécédent de y , donc $f(x) = y$.
- Réciproquement, on suppose que $f(x) = y$, donc x est un antécédent de y . Or f est bijective, donc y admet un unique antécédent, qui est donc x . Donc $x = f^{-1}(y)$.

□

Remarque. Cette constatation donne une nouvelle méthode pour montrer qu'une application est bijective, sans avoir à montrer séparément qu'elle est injective et surjective.

Exercice 11. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$ par $f(x) = e^{x-1} + 2$. Montrer que f réalise une bijection de son ensemble de départ vers son ensemble d'arrivée, et déterminer son application réciproque.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]2, +\infty[$,

$$y = f(x) \iff y = e^{x-1} + 2 \iff y - 2 = e^{x-1} \iff \ln(y - 2) = x - 1 \iff \ln(y - 2) + 1 = x,$$

où on pouvait bien composer par le logarithme puisque $y - 2 > 0$, sa stricte croissance sur $\mathbb{R}_+^*$ justifiant la validité de l'équivalence.

Donc tout élément de $]2, +\infty[$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$, donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$, et $\forall y > 2, f^{-1}(y) = \ln(y - 2) + 1$.

Proposition 3.9 (Composée de deux bijections)

Soit E, F, G trois ensembles, f une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G . Alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G . De plus,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. $g \circ f$ est injective comme composée d'injections et surjective comme composée de surjections, donc c'est bien une bijection de E dans G .

De plus, soit $y \in G$ et $x \in E$, l'utilisation successive des réciproques de g et f donne :

$$y = g \circ f(x) \iff y = g(f(x)) \iff g^{-1}(y) = f(x) \iff f^{-1}(g^{-1}(y)) = x \iff f^{-1} \circ g^{-1}(y) = x.$$

Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Proposition 3.10 (Bijektivité et image réciproque)

Soit E et F deux ensembles, f une bijection de E dans F et A un sous-ensemble de F . Alors

$$f^{-1}(A) = f^{\text{rec}}(A).$$

Remarque. Autrement dit, l'image directe de A par f^{-1} est égale à l'image réciproque de A par f . Cela justifie de renoncer à la notation f^{rec} , qui avait seulement été introduite à titre temporaire et que l'on n'utilisera plus jamais, pour utiliser f^{-1} à la place.

Démonstration. Soit $x \in E$,

$$x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tel que } x = f^{-1}(a) \Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tel que } f(x) = a \Leftrightarrow f(x) \in A \Leftrightarrow x \in f^{\text{rec}}(A).$$

Donc $f^{-1}(A) \subset f^{\text{rec}}(A)$ et $f^{\text{rec}}(A) \subset f^{-1}(A)$. D'où l'égalité des ensembles par double inclusion. $\square$

Remarque. Face à la notation $f^{-1}(A)$ dans un exercice, deux cas de figure possible :

- Si f est bijective, $f^{-1}(A)$ représente à la fois l'image directe de A par f^{-1} et l'image réciproque de A par f . Comme elles sont égales, il n'y a pas d'ambiguïté.
- Si f n'est pas bijective, $f^{-1}(A)$ représente l'image réciproque de A par f . Dans ce cas, attention : f^{-1} n'est en aucun cas la marque d'une application réciproque (puisque f n'est pas bijective).