

Ensemble des nombres complexes

Cours de É. Bouchet – PCSI

13 octobre 2026

Table des matières

1	Nombres complexes	2
1.1	Présentation	2
1.2	Représentation graphique	2
1.3	Écriture algébrique	3
2	Conjugaison et module	3
2.1	Conjugaison	3
2.2	Module	4
2.3	Interprétation géométrique du module	5
3	Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	6
3.1	Nombres complexes de module 1	6
3.2	Formules d'Euler et technique de l'angle moitié	7
3.3	Formule de Moivre	8
4	Formes trigonométrique et exponentielle	8
4.1	Arguments	8
4.2	Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$	9

1 Nombres complexes

1.1 Présentation

Définition 1.1 (Nombre complexe)

On appelle **nombre complexe** tout élément z pouvant s'écrire sous la forme $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i une solution de l'équation $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Remarque. Cela correspond à l'écriture ensembliste $\mathbb{C} = \{a + ib | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Remarque. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations internes, l'addition et la multiplication, dont les règles de calculs sont identiques à celles de $\mathbb{R}$, en tenant compte de l'égalité $i^2 = -1$. Les formules usuelles sur les sommes (somme de termes d'une suite géométrique, télescopage, binôme de Newton, identités remarquables...) restent valides dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Simplifier le produit $(1 + 3i)(2 - 5i)$.

Solution : $(1 + 3i)(2 - 5i) = 2 + 6i - 5i - 15i^2 = 2 + 15 + i(6 - 5) = 17 + i$.

Remarque. Si $z = a + ib$ avec (a, b) un couple de réels différent de $(0, 0)$, alors $z \neq 0$ et on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - i^2b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Exercice 2. Simplifier le quotient $\frac{1}{3i-2}$.

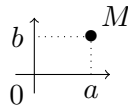
Solution : $\frac{1}{3i-2} = \frac{1}{-2+3i} = \frac{-2-3i}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-2-3i}{4+9} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

1.2 Représentation graphique

Définition 1.2 (Affixe)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, aussi appelé **plan complexe**.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et M le point du plan de coordonnées (a, b) . Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **l'affixe** du point M . C'est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Proposition 1.3 (Affixe d'un vecteur quelconque)

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B . Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Démonstration. Découle directement de la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. □

Proposition 1.4 (Affixe du milieu d'un segment)

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B . Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstration. On note C le milieu du segment et z_C son affixe. Alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, donc $z_C - z_A = z_B - z_C$, donc $2z_C = z_A + z_B$ et $z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$. □

1.3 Écriture algébrique

Définition 1.5 (Partie réelle, partie imaginaire)

L'écriture du nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ avec a et b des réels est appelée **l'écriture algébrique** de z . Le réel a est appelé la **partie réelle** de z et b est sa **partie imaginaire**.

On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarque. Attention : contrairement à ce que son nom pourrait laisser penser, la partie imaginaire est un réel.

Proposition 1.6 (Unicité de l'écriture algébrique)

L'écriture algébrique d'un nombre complexe z est unique.

Démonstration. Soit $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a + ib = \alpha + i\beta$. Alors $(a - \alpha) = -i(b - \beta)$.

— Si $b = \beta$, alors $a = \alpha$ et les deux écritures sont identiques.

— Si $b \neq \beta$, alors $i = -\frac{a-\alpha}{b-\beta} \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible (puisque $i^2 = -1$).

D'où l'unicité.

Variante : en mettant au carré l'égalité $(a - \alpha) = -i(b - \beta)$, on trouve $(a - \alpha)^2 = -(b - \beta)^2$, qui est à la fois positif et négatif, donc nul. Les deux carrés sont donc nuls. Donc $a = \alpha$ et $b = \beta$. $\square$

Proposition 1.7 (Écriture algébrique de la somme et du produit)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$ et $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$.

De plus, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$ et $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Re}(z_2) \operatorname{Im}(z_1)$.

Démonstration. On pose $a_1 = \operatorname{Re}(z_1)$, $a_2 = \operatorname{Re}(z_2)$, $b_1 = \operatorname{Im}(z_1)$ et $b_2 = \operatorname{Im}(z_2)$. On a alors $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. Les opérations de calcul sur les nombres complexes donnent directement :

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + b_2 a_1).$$

$\square$

Définition 1.8 (Nombre imaginaire pur)

Le complexe z est dit **imaginaire pur** si $\operatorname{Re}(z) = 0$. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Exemple. $3i$ est un imaginaire pur, $2 + 3i$ n'en est pas un.

2 Conjugaison et module

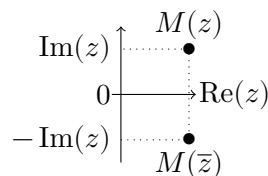
2.1 Conjugaison

Définition 2.1 (Conjugué)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Remarque. On a donc $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.

Remarque. Dans le plan complexe, l'image $M(\bar{z})$ du nombre complexe $\bar{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point $M(z)$:



Proposition 2.2 (Lien entre conjugué et partie réelle/imaginaire)

Soit $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Démonstration. On pose $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$. Alors $z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$. $\square$

Remarque. En particulier, $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

Proposition 2.3 (Opérations sur le conjugué)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. Si de plus z_2 est non nul, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Démonstration. On pose $a_1 = \operatorname{Re}(z_1)$, $a_2 = \operatorname{Re}(z_2)$, $b_1 = \operatorname{Im}(z_1)$ et $b_2 = \operatorname{Im}(z_2)$. Alors $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, puis :

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \\ \text{et si } z_2 \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} &= \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{1}{\bar{z}_2}.\end{aligned}$$

Avoir effectué le calcul pour l'inverse permet de simplifier le cas du quotient en s'y ramenant : si $z_2 \neq 0$,

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \times \frac{1}{\bar{z}_2} = \bar{z}_1 \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

$\square$

2.2 Module

Définition 2.4 (Module)

Soit $z = a + ib$ où (a, b) est un couple de réels. Le **module** de z , noté $|z|$, est le réel

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Remarque. Comme $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$, ces deux expressions sont bien égales.

Remarque. Si $z \in \mathbb{R}$, alors $z = z + 0 \times i$, donc $|z| = \sqrt{z^2 + 0^2} = \sqrt{z^2}$. Pour le cas des réels, la définition du module coïncide donc avec celle de la valeur absolue (ce qui justifie d'utiliser la même notation pour les deux).

Proposition 2.5 (Propriétés du module)

Pour tout nombre complexe z , $|z| = |\bar{z}|$, $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \iff z = 0$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$. Alors $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

De plus, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ (par propriété de la racine d'un nombre réel), et $|0| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$. Enfin, si $|z| = 0$, alors $a^2 + b^2 = 0$, donc a^2 et b^2 sont nuls (puisque ces deux termes sont positifs), donc a et b sont nuls, donc $z = 0$. $\square$

Proposition 2.6 (Relations entre $|\operatorname{Re}(z)|$, $|\operatorname{Im}(z)|$ et $|z|$)

Pour tout nombre complexe z ,

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+,$$

$$|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = |z| \iff z \in i\mathbb{R}_+.$$

Démonstration. On montre la première relation, la deuxième s'obtient de la même manière. Soit $z \in \mathbb{C}$, par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$|\operatorname{Re}(z)| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z|,$$

de plus,

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \iff (\operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ et } \operatorname{Re}(z)^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2) \iff (\operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0) \iff z \in \mathbb{R}_+,$$

où on invoque la stricte croissance du carré sur $\mathbb{R}_+$ pour justifier la première équivalence. $\square$

Proposition 2.7 (Module du produit et du quotient)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, et si $z_2 \neq 0$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Démonstration. Comme $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 \geq 0$, on peut écrire $|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| |z_2|$.

Et si $z_2 \neq 0$, on a de même $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{z_1}{z_2} \right) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)}} = \sqrt{\frac{z_1 \overline{z_1}}{z_2 \overline{z_2}}} = \frac{\sqrt{z_1 \overline{z_1}}}{\sqrt{z_2 \overline{z_2}}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. $\square$

Exercice 3. Déterminer le module de $\frac{(1+i)(4-3i)}{i-5}$.

Solution : $\left| \frac{(1+i)(4-3i)}{i-5} \right| = \frac{|1+i||4-3i|}{|i-5|} = \frac{\sqrt{1+1}\sqrt{16+9}}{\sqrt{1+25}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{25}}{\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$.

Proposition 2.8 (Inégalité triangulaire)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$.

Remarque. La condition $z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$ signifie que les vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

Démonstration. On procède d'abord comme dans le cas réel :

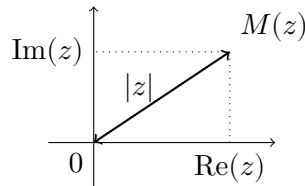
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \\ &= |z_1|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \\ &= 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) - 2|z_1||z_2| \leq 0. \end{aligned}$$

D'où $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$, et en passant à la racine (croissante sur $\mathbb{R}_+$), comme les modules sont tous positifs, $|z_1 + z_2| \leq (|z_1| + |z_2|)$. De plus, on a égalité si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = |z_1||z_2| \iff z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$. $\square$

2.3 Interprétation géométrique du module

Proposition 2.9 (Module et distance à l'origine)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Dans le plan complexe, $|z|$ représente la distance de l'origine 0 au point $M(z)$.



Démonstration. On note d la distance de l'origine au point $M(z)$. D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle délimité par $M(z) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$, $(0, 0)$ et $(\operatorname{Re}(z), 0)$, on trouve $d^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$. Donc $d^2 = |z|^2$. Or d et $|z|$ sont positifs, donc $d = |z|$. $\square$

Proposition 2.10 (Module et distance entre deux points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et A, B leurs images dans le plan complexe. La valeur $|a - b|$ correspond à la distance entre les points A et B .

Démonstration. $|a - b|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (d'après le résultat précédent), donc à la distance entre A et B . $\square$

Remarque. On déduit directement de ces propriétés que si A est un point d'affixe a et r est un réel strictement positif,

- Le cercle de centre A et de rayon r correspond à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$.
- Le disque fermé de centre A et de rayon r correspond à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$.
- Le disque ouvert de centre A et de rayon r correspond à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$.

Exercice 4. Montrer que le point d'affixe $2 + i$ se trouve sur le cercle de centre d'affixe $2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Solution : Il suffit de vérifier que $|2 + i - 2i| = |2 - i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

3 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

3.1 Nombres complexes de module 1

Définition 3.1 (Cercle trigonométrique)

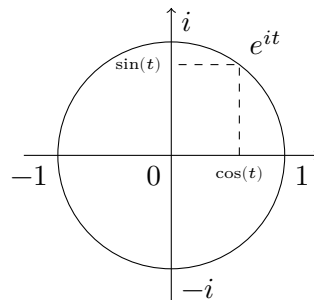
On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ s'identifie au cercle trigonométrique, de centre 0 et de rayon 1.

Définition 3.2 (e^{it} , $t \in \mathbb{R}$)

Soit $t \in \mathbb{R}$, on note e^{it} le nombre complexe $\cos(t) + i \sin(t)$.

Remarque. Attention, l'exponentielle est ici une simple notation. Notamment, il ne FAUT PAS appliquer $\ln$ à des exponentielles complexes pour les simplifier.

Remarque. Comme tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées du type $(\cos(t), \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$, on a donc $\mathbb{U} = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

**Proposition 3.3** (Produit de termes en e^{it})

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition :

$$\begin{aligned} e^{ia}e^{ib} &= (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b)) \\ &= \cos(a)\cos(b) + i \cos(a)\sin(b) + i \sin(a)\cos(b) + i^2 \sin(a)\sin(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)) + i (\cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b)) \\
&= \cos(a+b) + i \sin(a+b) \\
e^{ia} e^{ib} &= e^{i(a+b)}
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.4 (Quotient de termes en e^{it})

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{ia}} = e^{-ia} = \frac{1}{e^{ia}}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$, un calcul et les parités de sinus et cosinus donnent :

$$\overline{e^{ia}} = \overline{\cos(a) + i \sin(a)} = \cos(a) - i \sin(a) = \cos(-a) + i \sin(-a) = e^{-ia}.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{e^{ia}} = \frac{1}{\cos(a) + i \sin(a)} = \frac{\cos(a) - i \sin(a)}{\cos^2(a) + \sin^2(a)} = \frac{e^{-ia}}{1} = e^{-ia}.$$

□

Remarque. On déduit immédiatement des deux derniers résultats que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{e^{ia}}{e^{ib}} = e^{i(a-b)}$.

Proposition 3.5 (Module de termes en e^{it})

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^{it}| = 1$.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul : $|e^{it}| = |\cos(t) + i \sin(t)| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{1} = 1$.

□

3.2 Formules d'Euler et technique de l'angle moitié

Proposition 3.6 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstration. Comme $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$,

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

□

Remarque. Ces formules permettent d'utiliser des technique de l'angle moitié pour factoriser des expressions : soit $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
e^{it} + e^{i\theta} &= e^{i\frac{t+\theta}{2}} \left(\frac{e^{it}}{e^{i\frac{t+\theta}{2}}} + \frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{t+\theta}{2}}} \right) = e^{i\frac{t+\theta}{2}} \left(e^{i\frac{t-\theta}{2}} + e^{-i\frac{t-\theta}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{t-\theta}{2}\right) e^{i\frac{t+\theta}{2}}. \\
e^{it} - e^{i\theta} &= e^{i\frac{t+\theta}{2}} \left(\frac{e^{it}}{e^{i\frac{t+\theta}{2}}} - \frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{t+\theta}{2}}} \right) = e^{i\frac{t+\theta}{2}} \left(e^{i\frac{t-\theta}{2}} - e^{-i\frac{t-\theta}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{t-\theta}{2}\right) e^{i\frac{t+\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

Le cas particulier $t = 0$ permet entre autres de traiter les formes $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Ces relations permettent entre autres de retrouver des formules trigonométriques, en prenant les parties réelles ou imaginaires.

Exercice 5. Soit $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant les techniques d'angle moitié à $e^{it} + e^{i\theta}$, factoriser $\cos(t) + \cos(\theta)$.

Solution : $\cos(t) + \cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{it} + e^{i\theta}) = 2 \cos\left(\frac{t+\theta}{2}\right) \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{t-\theta}{2}}\right) = 2 \cos\left(\frac{t+\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{t-\theta}{2}\right)$.

Exercice 6. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. **Linéariser** $\cos^3(\theta)$ (c'est-à-dire modifier cette expression pour faire disparaître le produit et se ramener à une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques).

Solution : On applique successivement les formules d'Euler, le binôme de Newton, et de nouveau les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3}{8} \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3 \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \\ \cos^3(\theta) &= \frac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^n \cos(3k)$.

Solution : Soit $T = \sum_{k=0}^n e^{i3k}$, alors $S = \operatorname{Re}(T)$. On commence donc par calculer T . Par la formule de somme géométrique (puisque $e^{i3} \neq 1$) puis en appliquant la formule de l'angle moitié, on trouve :

$$T = \sum_{k=0}^n (e^{3i})^k = \frac{1 - e^{3i(n+1)}}{1 - e^{3i}} = \frac{e^{\frac{3i(n+1)}{2}} (e^{-\frac{3i(n+1)}{2}} - e^{\frac{3i(n+1)}{2}})}{e^{\frac{3i}{2}} (e^{-\frac{3i}{2}} - e^{\frac{3i}{2}})} = \frac{e^{\frac{3i(n+1)}{2}} (-2i \sin(\frac{3(n+1)}{2}))}{e^{\frac{3i}{2}} (-2i \sin(\frac{3}{2}))} = \frac{\sin(\frac{3(n+1)}{2})}{\sin(\frac{3}{2})} e^{\frac{3in}{2}}.$$

D'où par passage à la partie réelle, $S = \frac{\sin(\frac{3(n+1)}{2})}{\sin(\frac{3}{2})} \cos(\frac{3n}{2})$.

3.3 Formule de Moivre

Proposition 3.7 (Formule de Moivre)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Démonstration. On passe sous forme exponentielle : $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$. $\square$

Exercice 8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Solution : La formule de Moivre donne :

$$\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3i \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - i \sin^3(\theta).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta).$$

4 Formes trigonométrique et exponentielle

4.1 Arguments

Définition 4.1 (Argument)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Tout réel θ tel que $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z| e^{i\theta}$ est appelé un **argument** de z .

Remarque. Le seul nombre complexe n'ayant pas d'argument est 0.

Remarque. Si θ est un argument de z , alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ est encore un argument de z . De plus, si θ et θ' sont deux arguments de z , alors $\theta \equiv \theta' [2\pi]$.

Remarque. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On suppose que $a + ib = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. Alors :

$$a = r(\cos(\theta)) \text{ et } b = r(\sin(\theta)), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 9. Trouver le module et un argument de $z = 1 + i$.

Solution : $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc le module de z vaut $\sqrt{2}$.

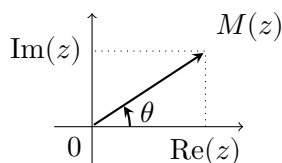
De plus, $z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z .

Définition 4.2 (Formes trigonométrique et exponentielle)

Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la **forme trigonométrique** (ou **exponentielle**) $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et θ réel. On a alors $r = |z|$ et θ est un argument de z .

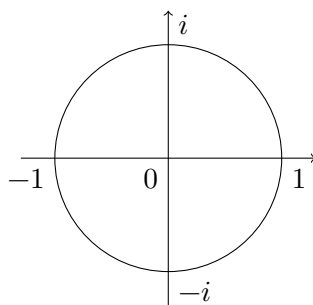
Remarque. Attention, contrairement à la forme algébrique, cette écriture n'est pas unique (puisque l'on peut trouver plusieurs arguments différents).

Remarque. Soit z un nombre complexe d'argument θ et M son image dans le plan complexe. Alors θ correspond à une valeur de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radians.



Remarque. Le cercle trigonométrique correspond aux nombres complexes de module 1. Une lecture graphique des angles permet donc de retrouver les formes exponentielles suivantes, particulièrement classiques :

$$1 = e^{i0}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$



4.2 Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$

Proposition 4.3 (Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, a \cos(t) + b \sin(t) = r \cos(t - \varphi)$.

Démonstration. On pose $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a \cos(t) + b \sin(t) = r \left(\frac{a}{r} \cos(t) + \frac{b}{r} \sin(t) \right).$$

Or $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{r^2} = 1$. Donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{r} = \cos(\varphi)$ et $\frac{b}{r} = \sin(\varphi)$. Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a \cos(t) + b \sin(t) = r (\cos(\varphi) \cos(t) + \sin(\varphi) \sin(t)) = r \cos(t - \varphi).$$

□

Exercice 10. Soit $t \in \mathbb{R}$, déterminer une expression de $\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t)$ sous la forme $r \cos(t - \varphi)$.

Solution : On calcule $r = \sqrt{1 + 3} = 2$. D'où la factorisation :

$$\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(t) \right).$$

On reconnaît maintenant $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, d'où :

$$\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(t) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(t) \right) = 2 \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right).$$