

Généralités sur les fonctions réelles

Cours de É. Bouchet – PCSI

16 octobre 2026

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Règles de calcul, représentation graphique	2
1.2	Parité, périodicité et symétries	3
1.3	Bornes	4
1.4	Monotonie	4
2	Dérivation	5
2.1	Dérivabilité en un point, fonction dérivée	5

De nombreux résultats seront admis dans ce chapitre pour être démontrés plus tard dans l'année. Les ensembles considérés dans ce chapitre sont tous des ensembles de réels et les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Généralités

1.1 Règles de calcul, représentation graphique

Définition 1.1 (Somme, produit, quotient)

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble E .

- On note $f + g$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $f(x) + g(x)$.
- On note $f \times g$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $f(x) \times g(x)$.
- Si g ne s'annule pas sur E , on note $\frac{f}{g}$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Définition 1.2 (Composée, rappel)

Soit D_f , A_f , D_g et A_g des ensembles, f une application définie de D_f dans A_f et g une application définie de D_g dans A_g . Si $A_f \subset D_g$, on appelle **composée** de f par g , notée $g \circ f$, l'application définie de D_f dans A_g par :

$$\forall x \in D_f, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

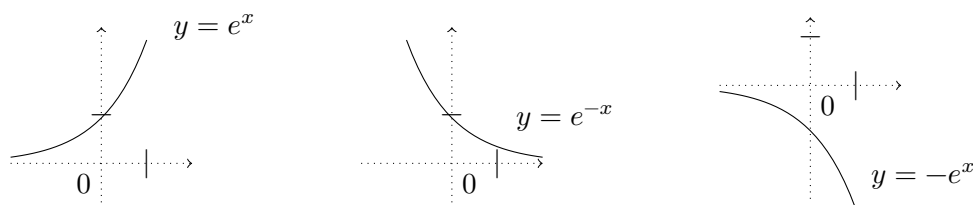
Proposition 1.3 (Symétrie des représentations graphiques)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E .

La fonction $x \mapsto f(-x)$ est définie sur $\{-x | x \in E\}$ et sa représentation graphique se déduit de celle de f par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

La fonction $x \mapsto -f(x)$ est définie sur E et sa représentation graphique se déduit de celle de f par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple.



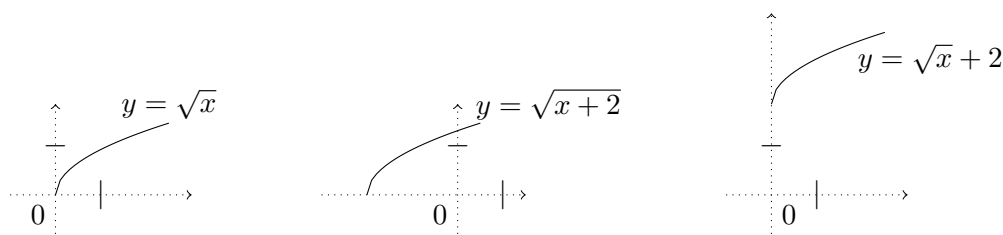
Proposition 1.4 (Translation des représentations graphiques)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $a \in \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto f(x + a)$ est définie sur $\{x - a | x \in E\}$ et sa représentation graphique se déduit de celle de f par translation de vecteur $-a\vec{i}$, où $\vec{i}$ dirige l'axe des abscisses.

La fonction $x \mapsto f(x) + a$ est définie sur E et sa représentation graphique se déduit de celle de f par translation de vecteur $a\vec{j}$, où $\vec{j}$ dirige l'axe des ordonnées.

Exemple.



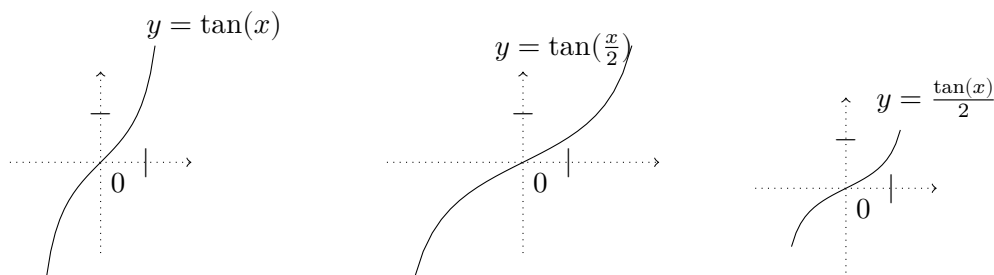
Proposition 1.5 (Dilatation/contraction des représentations graphiques)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $a \in \mathbb{R}_+^*$

La fonction $x \mapsto f(ax)$ est définie sur $\{\frac{x}{a} | x \in E\}$ et sa représentation graphique se déduit de celle de f par une dilatation/contraction horizontale de rapport multiplicatif a .

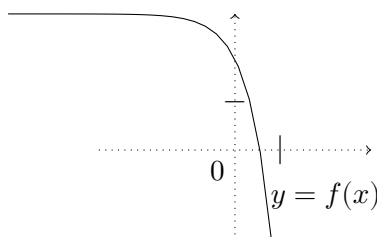
La fonction $x \mapsto af(x)$ est définie sur E et sa représentation graphique se déduit de celle de f par une dilatation/contraction verticale de rapport multiplicatif a .

Exemple.



Exercice 1. Déterminer la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -e^{2x} + 3$.

Solution : Pour tracer cette courbe, on s'aide des limites en $\pm\infty$, de $f(0)$ et du point d'annulation en $\frac{\ln(3)}{2}$.



1.2 Parité, périodicité et symétries

Définition 1.6 (Fonction paire, impaire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E centré en 0.

- On dit que f est **paire** lorsque $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est **impaire** lorsque $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.

Remarque. Un ensemble E centré en 0 assure que $x \in E \iff -x \in E$, donc que tous les termes sont bien définis.

Proposition 1.7 (Parité et symétries)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E centré en 0.

- Si f est une fonction paire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est une fonction impaire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est paire, alors que $x \mapsto x^3$ est impaire.



Remarque. Si une fonction est paire ou impaire, on peut donc se contenter de l'étudier sur une moitié d'ensemble de définition, et déduire ensuite le comportement général.

Définition 1.8 (Fonction périodique)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . On dit que f est **périodique** quand il existe un réel T non nul tel que :

$$x \in E \iff x + T \in E \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad f(x + T) = f(x).$$

On dit alors que f est T -périodique, et le réel T est appelé une **période** de f .

Remarque. Une fonction peut avoir plusieurs périodes différentes.

Exemple. La fonction $\tan$ est périodique de période $\pi, 2\pi, 4\pi \dots$

Remarque. Si une fonction est périodique de période T , on peut donc se contenter de l'étudier sur un ensemble de taille T , et déduire ensuite le comportement général.

1.3 Bornes

Définition 1.9 (Majorant, minorant)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E .

- f est **majorée** lorsqu'il existe un réel M (appelé **majorant**) tel que $\forall x \in E, f(x) \leq M$.
- f est **minorée** lorsqu'il existe un réel m (appelé **minorant**) tel que $\forall x \in E, f(x) \geq m$.
- f est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque. Majorer ou minorer la fonction f revient ainsi à majorer ou minorer l'ensemble $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$.

Définition 1.10 (Maximum, minimum)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E , et $x_0 \in E$.

- f admet un **maximum (global)** en x_0 lorsque $\forall x \in E, f(x) \leq f(x_0)$. On note $f(x_0) = \max_{x \in E} f(x)$.
- f admet un **minimum (global)** en x_0 lorsque $\forall x \in E, f(x) \geq f(x_0)$. On note $f(x_0) = \min_{x \in E} f(x)$.

Proposition 1.11 (Bornes et valeur absolue)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Démonstration. On procède en deux temps :

- Supposons que $|f|$ est majorée. Alors $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E, |f(x)| \leq K$. Donc $\forall x \in E, -K \leq f(x) \leq K$ et f est bornée.
- Supposons que f est bornée. Alors $\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in E, m \leq f(x) \leq M$. On pose $K = \max(|m|, |M|)$. Donc $\forall x \in E, -K \leq -|m| \leq m \leq f(x) \leq M \leq |M| \leq K$. Donc $\forall x \in E, |f(x)| \leq K$, donc $|f|$ est majorée.

□

1.4 Monotonie

Définition 1.12 (Fonction croissante, décroissante)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E .

- On dit que f est **croissante** sur E lorsque $\forall(a, b) \in E^2, a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est **strictement croissante** sur E lorsque $\forall(a, b) \in E^2, a < b \implies f(a) < f(b)$.
- On dit que f est **décroissante** sur E lorsque $\forall(a, b) \in E^2, a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$.
- On dit que f est **strictement décroissante** sur E lorsque $\forall(a, b) \in E^2, a < b \implies f(a) > f(b)$.

Définition 1.13 (Fonction monotone)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . On dit que f est une fonction **monotone** sur E lorsque f est croissante sur E ou décroissante sur E , et que f est **strictement monotone** sur E si elle est strictement croissante sur E ou strictement décroissante sur E .

Proposition 1.14 (Composée de fonctions monotones)

Soit f et g deux fonctions monotones sur E et $f(E)$ respectivement. Alors $g \circ f$ est monotone sur E , et :

- Si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$ est croissante sur E .
- Si f et g ont des sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est décroissante sur E .

Démonstration. On traite ici deux des quatre cas, les autres se gèrent par la même méthode :

- Si f et g sont croissantes sur E et $f(E)$:
Soit a et b des éléments de E tels que $a \leq b$. On a $a \leq b$, donc $f(a) \leq f(b)$, puis $g(f(a)) \leq g(f(b))$.
Donc $g \circ f$ est croissante sur E .
- Si f est croissante sur E et g décroissante sur $f(E)$:
Soit a et b des éléments de E tels que $a \leq b$. On a $a \leq b$, donc $f(a) \leq f(b)$, puis $g(f(a)) \geq g(f(b))$.
Donc $g \circ f$ est décroissante sur E .

□

Remarque. On ne peut par contre absolument rien dire sur le produit de deux fonctions monotones.

Exemple. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -1$ et $g(x) = e^x$. Ces deux fonctions sont croissantes sur $\mathbb{R}$ (f est même constante).

Par contre, comme $0 \leq 1$ et $(fg)(0) = -e^0 = -1 > -e = (fg)(1)$, le produit fg est n'est pas croissant sur $\mathbb{R}$.

2 Dérivation

2.1 Dérivabilité en un point, fonction dérivée

Définition 2.1 (Fonction dérivable en un point, nombre dérivé)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $x_0 \in E$. On dit que f est **dérivable** en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite s'appelle **nombre dérivé** de f en x_0 et est notée $\frac{df}{dx}(x_0)$ ou $f'(x_0)$.

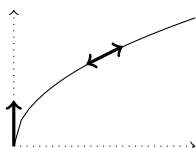
Remarque. On peut aussi écrire cette limite sous la forme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Proposition 2.2 (Tangente à la courbe)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $x_0 \in E$. Si f est dérivable en x_0 , alors la courbe représentative de f admet au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Remarque. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe représentative de f admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a donc les tangentes :



Définition 2.3 (Fonction dérivée)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . On dit que la fonction f est **dérivable** sur E lorsque f est dérivable en tout point de E . On définit alors la **fonction dérivée** de f notée f' ou $\frac{df}{dx}$, définie sur E par $f' : x \mapsto f'(x)$.

Remarque. On peut utiliser la notation $\frac{d}{dx}(f(x))$ à la place de $f'(x)$. La notation $(f(x))'$ est par contre interdite !