Calcul vectoriel

N. Mesnier
Lycée international Jean Perrin, Lyon

2026–2027

Plan du cours

1. Introduction
2. Opértations vectorielles
3. Applications

1 2 3

Introduction

Pourquoi des vecteurs ?

Les **vecteurs**

sont des outils privilégiés

pour préciser :

- la situation d'un élément matériel dans un référentiel ;
- la vitesse ou l'accélération d'un de ses points par rapport à un référentiel donné ;
- les actions mécaniques agissant sur lui.

$\Downarrow$

modèles et calculs

en mécanique

Pourquoi des vecteurs ?

Les **vecteurs**

sont des outils privilégiés

pour préciser :

- la situation d'un élément matériel dans un référentiel ;
- la vitesse ou l'accélération d'un de ses points par rapport à un référentiel donné ;
- les actions mécaniques agissant sur lui.

$\Downarrow$

modèles et calculs

en mécanique

Définition

Définition (Vecteur)

Un vecteur est un objet mathématique, noté $\overrightarrow{u}$ par exemple pour le « vecteur u », qui appartient un espace vectoriel et qui possède trois caractéristiques :

- une direction ;
- un sens ;
- une norme.

- Notations
  - $\mathscr{E}$: ensemble des points de l'espace géométrique 3D ;
  - $\mathscr{V}$: ensemble des vecteurs de l'espace ;
  - $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ vers $\overrightarrow{v}$;
  - $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \equiv -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \, [2\pi]$ une mesure de l'angle opposé.

Propriétés élémentaires

Addition vectorielle

Pour former la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il suffit de considérer trois points A, B, C de $\mathscr{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Le vecteur somme est alors donné par la relation de Chasles :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

L'addition vectorielle vérifie les propriétés suivantes :

- elle est associative : $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathscr{V},\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- elle est commutative : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathscr{V},\ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- elle possède un élément neutre, noté $\vec{0}$, tel que : $\forall \vec{u} \in \mathscr{V},\ \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- chaque vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$ possède un vecteur symétrique $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$ et noté $-\vec{u}$.

Propriétés élémentaires

Produit d'un vecteur et d'un réel

À tout nombre réel λ et à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathscr{V}$, on peut associer le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$.
Ce produit externe vérifie les propriétés suivantes :

- il possède un élément neutre : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathscr{V},\ 1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- il est distributif par rapport à l'addition des réels :
  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall \overrightarrow{u} \in \mathscr{V},\ (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{u}$
- il est distributif par rapport à l'addition vectorielle :
  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathscr{V},\ \lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$

Espace vectoriel

On dira, pour résumer les propriétés de l'addition vectorielle et du produit externe, que le triplet $(\mathscr{V}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Base d'un espace vectoriel

Définition (Base)

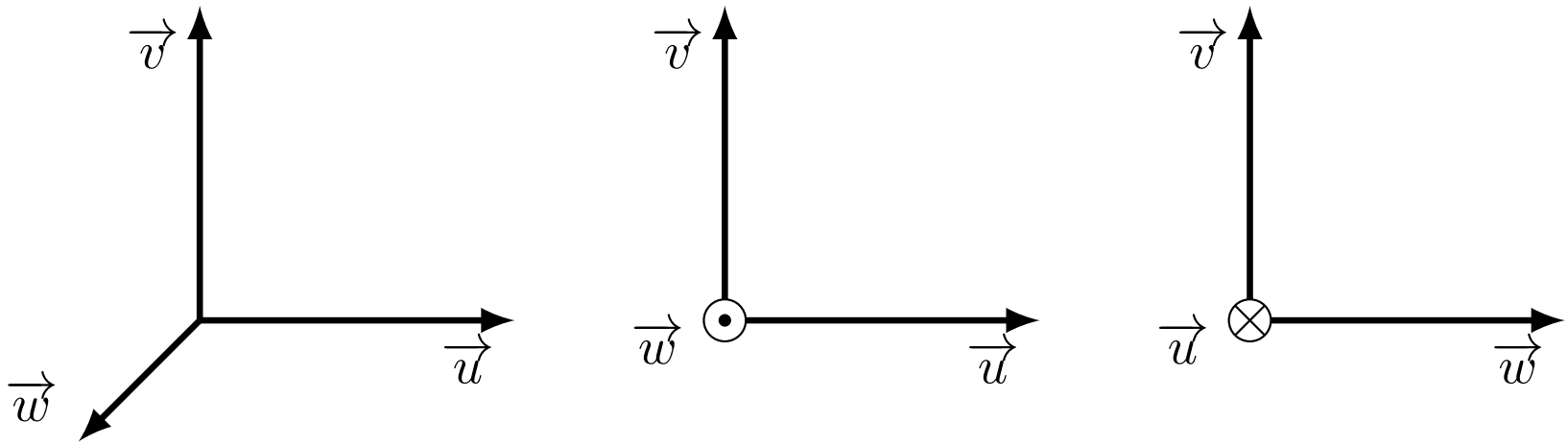
Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non coplanaires.

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une **base directe**, alors les triplets $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.
Les triplets $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ et $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$, où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

Base d'un espace vectoriel

Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non coplanaires.

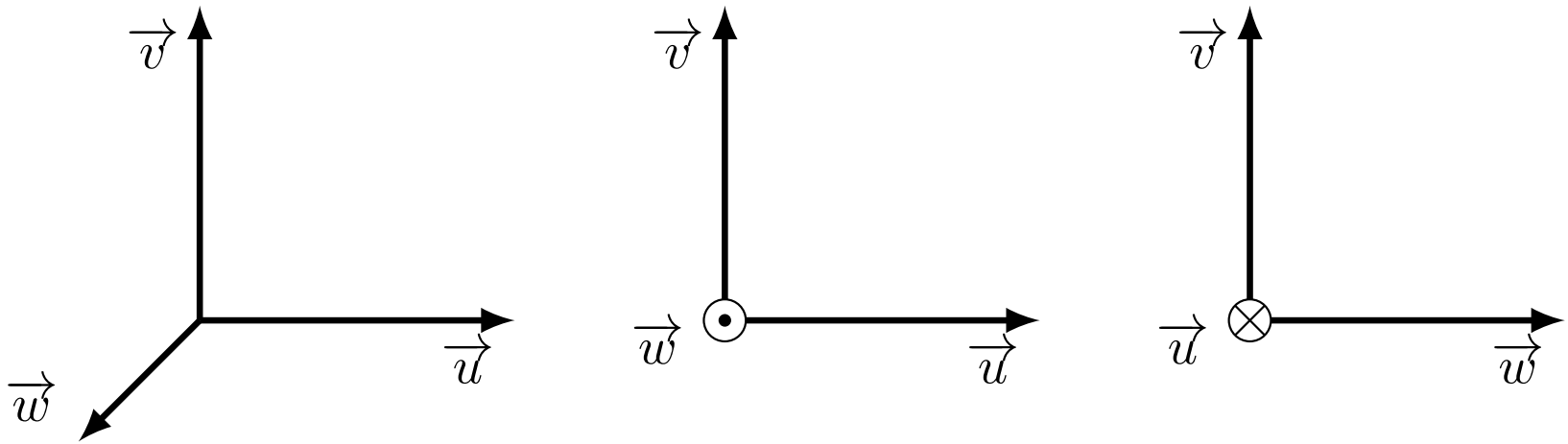


Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une **base directe**, alors les triplets $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.
Les triplets $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ et $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$, où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

Base d'un espace vectoriel

Définition (Base)

Une base d'un espace vectoriel de dimension trois est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non coplanaires.



Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une **base directe**, alors les triplets $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, obtenus par permutations circulaires, sont aussi des bases directes.
Les triplets $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ et $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$, où on a à chaque fois échangé deux vecteurs, sont des **bases indirectes**.

1 2 3

Opértations vectorielles

Produit scalaire

Définition (Produit scalaire)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\begin{aligned} &\text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, && \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ ; \\ &\text{sinon,} && \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \end{aligned}$$

Produit scalaire

Propriété

Le produit scalaire est une application de $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathbb{R}$

- bilinéaire :
$$(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda\,(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v}) + \mu\,(\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v})$$
- symétrique :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$
- définie positive :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Définition (Norme)

On appelle norme d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ le réel

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} \geqslant 0$$

Produit scalaire

Proposition (Perpendicularité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Produit scalaire = détecteur d'orthogonalité !

Produit scalaire

Proposition (Perpendicularité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Produit scalaire = détecteur d'orthogonalité !

Produit vectoriel

Définition (Produit vectoriel)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
- sinon, l'unique vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, de norme :

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

et tel que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit direct (une base directe de l'espace).

Produit vectoriel

Propriété

Le produit vectoriel est une application de $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$

- bilinéaire :

$$(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda\,(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v}) + \mu\,(\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v})$$

- antisymétrique :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$$

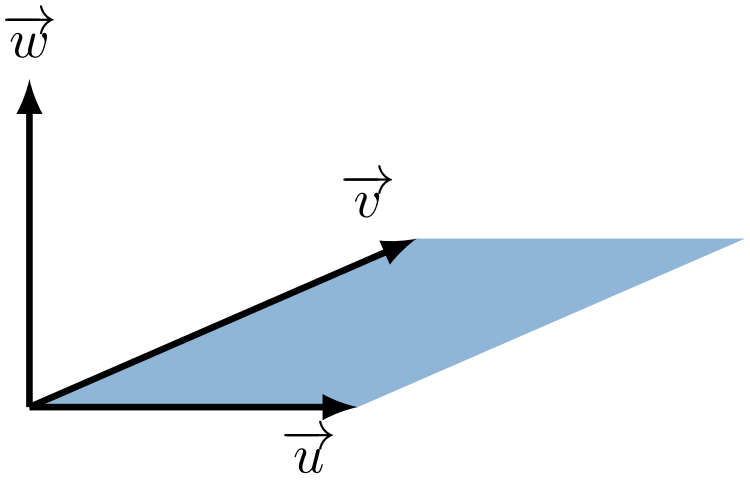
Proposition

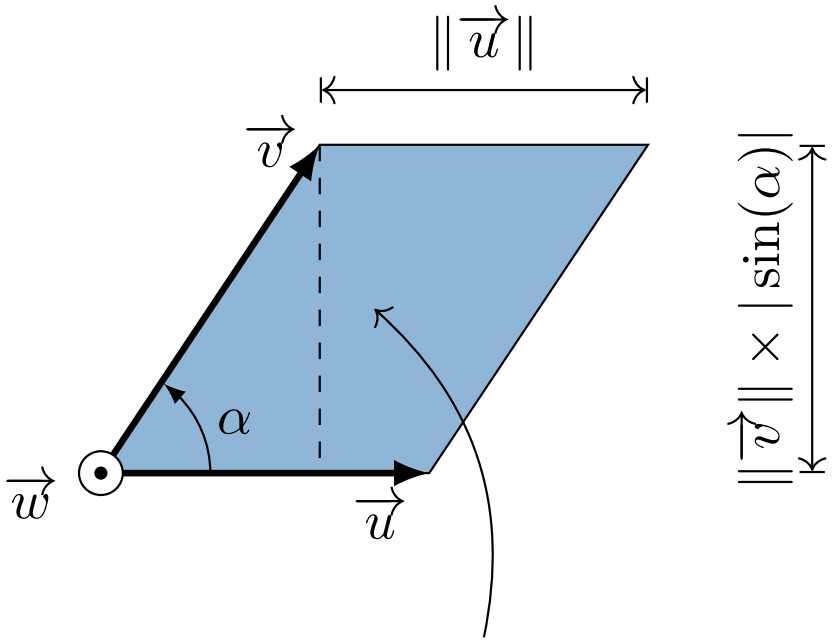
Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est une base orthonormée directe, alors*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{w} \\
\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} &= -(\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \\
\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} &= -(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

Produit vectoriel

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathscr{P}$, alors le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et de norme la surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan $\mathscr{P}$.





$$\text{Aire} = \|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$$

Produit vectoriel

Proposition (Colinéarité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Produit vectoriel = détecteur de colinéarité !

Produit vectoriel

Proposition (Colinéarité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Produit vectoriel = détecteur de colinéarité !

Produit vectoriel

Proposition (Double produit vectoriel)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u}$$

Produit mixte

Définition (Produit mixte)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle produit mixte (ou déterminant) du triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Produit mixte

Propriété

Le produit mixte est une application de $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathbb{R}$

- trilinéaire :

$$[(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}) \wedge (\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2})] \cdot \overrightarrow{w} = \lambda\alpha\,(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{w} + \lambda\beta\,(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{w} + \mu\alpha\,(\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{w} + \mu\beta\,(\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{w}$$

- antisymétrique :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$$

- alternée :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = \det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Produit mixte

Proposition (Coplanéité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0 \iff \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité !

Proposition

Si $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée directe, alors

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 1$$

Produit mixte

Proposition (Coplanéité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0 \iff \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité !

Proposition

Si $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée directe, alors

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 1$$

Produit mixte

Proposition (Coplanéité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{u}, \ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Produit mixte = détecteur de coplanéité !

Proposition

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe, alors

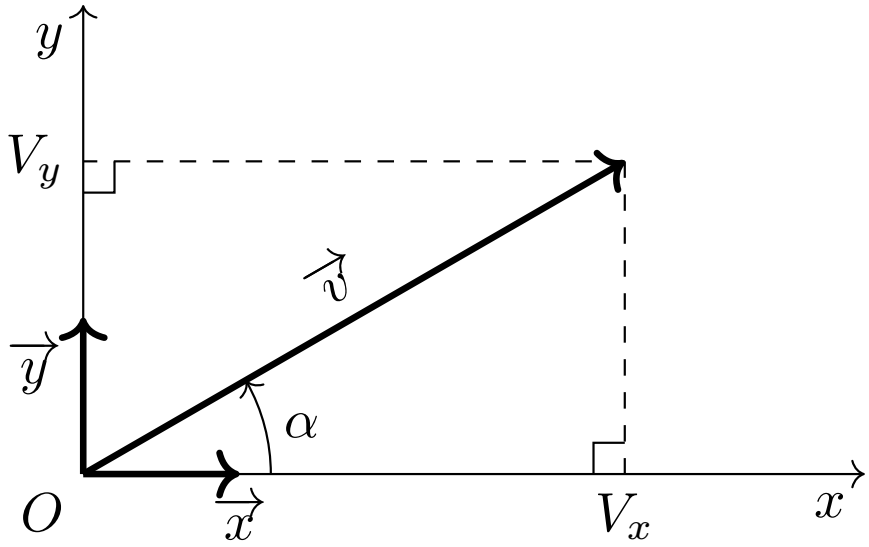
$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1$$

1 2 3

Applications

Projection d'un vecteur

Soit une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormée et $\vec{v}$ un vecteur orienté d'un angle $\alpha = (\vec{x}, \vec{v})$ par rapport à l'horizontale.



Coordonnées du vecteur $\vec{v}$:

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{x} = \|\vec{v}\| \times \underbrace{\|\vec{x}\|}_{=1} \times \cos \underbrace{(\vec{v}, \vec{x})}_{-\alpha} = \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$$

$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{y} = \|\vec{v}\| \times \underbrace{\|\vec{y}\|}_{=1} \times \cos \underbrace{(\vec{v}, \vec{y})}_{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \|\vec{v}\| \times \sin(\alpha)$$

Projection d'un vecteur

Ainsi, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ peut se décomposer de façon unique dans une base orthonormée $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x})\,\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y})\,\overrightarrow{y} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{z})\,\overrightarrow{z} \\ &= v_x\,\overrightarrow{x} + v_y\,\overrightarrow{y} + v_z\,\overrightarrow{z}\end{aligned}$$

Du théorème de Pythagore, on en déduit que la norme du vecteur $\overrightarrow{v}$, notée $\|\overrightarrow{v}\|$, est la grandeur toujours positive :

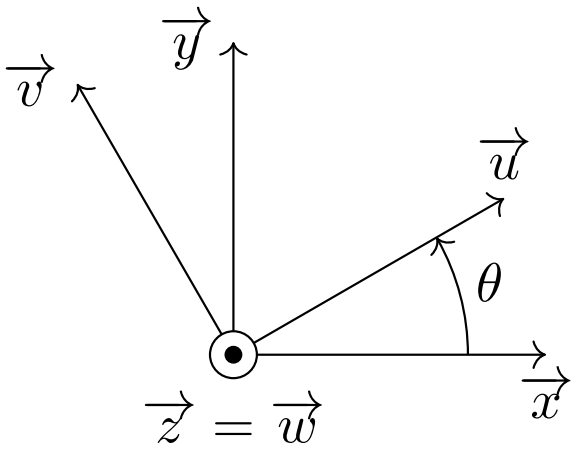
$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Changement de base

Définition (Figure géométrale)

On appelle figure géométrale une figure plane permettant de relier deux bases orthonormées possédant une direction commune. L'orientation des vecteurs d'une base par rapport à l'autre est définie par un angle que l'on représentera toujours positif et inférieur à $\pi/4$.

Projections nécessaires au passage de $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ vers $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:



$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{y} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$
$$\vec{v} \cdot \vec{x} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin(\theta)$$
$$\vec{v} \cdot \vec{y} = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

Changement de base

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \cos(\theta) \quad \vec{u} \cdot \vec{y} = \sin(\theta) \quad \vec{v} \cdot \vec{x} = -\sin(\theta) \quad \vec{v} \cdot \vec{y} = \cos(\theta)$$

- Exemple

$$\vec{V} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ s'écrira

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \left(\vec{V} \cdot \vec{x}\right)\vec{x} + \left(\vec{V} \cdot \vec{y}\right)\vec{y} + \left(\vec{V} \cdot \vec{z}\right)\vec{z} \\ &= \left(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)\right)\vec{x} + \left(a\sin(\theta) + b\cos(\theta)\right)\vec{y} + c\vec{z}\end{aligned}$$

dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Par contre, quelle que soit la base choisie pour exprimer les coordonnées de $\vec{V}$, sa norme sera toujours identique :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Distance d'un point à une droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par le point A
et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}$.
Alors :

$$M \in \mathscr{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$$

Proposition (Distance point-droite)

Soit M un point quelconque de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}$ une droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$. La distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ est définie par :

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Distance d'un point à un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan contenant le point A
et de normale définie par le vecteur non nul $\overrightarrow{n}$.
Alors :

$$M \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Proposition (Distance point-plan)

Soit M un point quelconque de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{P}$ un plan contenant le point A et de normale $\overrightarrow{n}$. La distance du point M au plan $\mathscr{P}$ est définie par :

$$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Décomposition orthogonale d'un vecteur

Soit $\mathscr{P}$ un plan de normale $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$.
En exploitant la formule du double produit vectoriel selon

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n}) \wedge \overrightarrow{n} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n})\,\overrightarrow{n} - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n})\,\overrightarrow{u}$$

il vient que l'on peut décomposer tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ selon :

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\left[(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u})\,\overrightarrow{n} + (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{n}\right]$$

en un vecteur colinéaire à la normale $\overrightarrow{n}$ et en un vecteur parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Pour finir...

Une « nouvelle » version du théorème de Pythagore !

$$\left(\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}\right)^2+\left(\frac{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}\right)^2=1$$



cc

N. Mesnier, lycée international Jean Perrin, Lyon