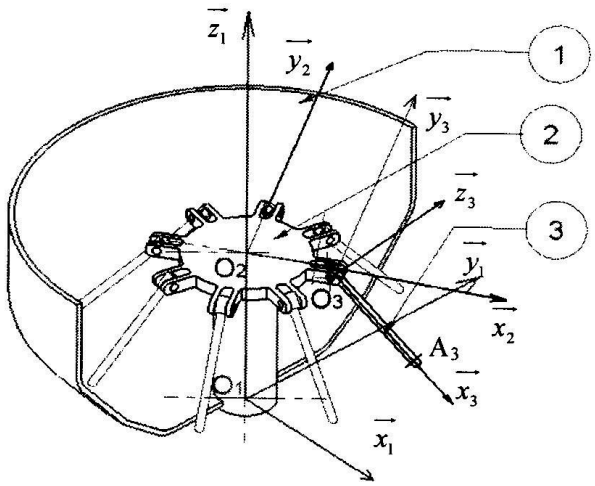
Applications de calcul vectoriel

1 Centrifugeuse de laboratoire

Une centrifugeuse de laboratoire est constituée d'un carter **1** en forme de bol, d'un rotor **2** auquel sont fixées des éprouvettes **3**. Les éprouvettes contiennent chacune deux liquides de masse volumique différente. Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du rotor **2**, les éprouvettes **3** s'inclinent et le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté vers le fond des éprouvettes, ce qui réalise la séparation des deux liquides.



Hypothèses et notations :

- on associe au carter **1** le repère $\mathcal{R}_1 = (O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$;
- on associe au rotor **2** le repère $\mathcal{R}_2 = (O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ avec $\alpha = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2})$;
- on associe à l'éprouvette **3** le repère $\mathcal{R}_3 = (O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ avec $\beta = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}) = (\overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{z_3})$;
- enfin, on note $O_1O_2 = h$, $O_2O_3 = R$ et $O_3A_3 = \ell$.

Question 1. *Exprimer le vecteur* $\overrightarrow{O_1A_3}$.

Question 2. *Déterminer la norme de* $\overrightarrow{O_1A_3}$.

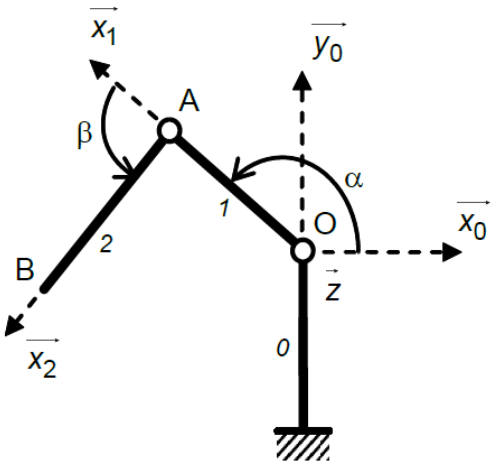
Question 3. *Calculer les produits vectoriels suivants :*

$$\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_1}, \quad \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}, \quad \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_1}, \quad \overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_1}, \quad \overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{z_1}, \quad \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_3} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_3}.$$

2 Robot Ericc3

Afin de simplifier notre étude et de faire apparaître plus clairement les informations qui nous intéressent (distance entre les points, mouvements relatifs entre les bases, etc.), nous allons travailler sur une version schématisée du robot Ericc3 appelée « schéma cinématique ».





Hypothèses et notations :

- on associe au lacet **0** le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ avec $\overrightarrow{y_0}$ la verticale ascendante ;
- on associe au bras **1** le repère $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, avec $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$;
- on associe à l'avant-bras **2** le repère $\mathcal{R}_2 = (A_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ avec $\beta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2})$;
- enfin, on note $OA = \ell_1$ et $AB = \ell_2$.

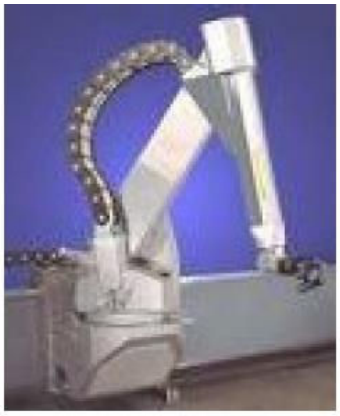
Question 4. *Réaliser les figures géométrales permettant d'orienter les bases des différents repères les unes part rapport aux autres.*

Question 5. *Calculer la norme de* $\overrightarrow{OB}$.

Question 6. *Déterminer la hauteur du point B par rapport au point O.*

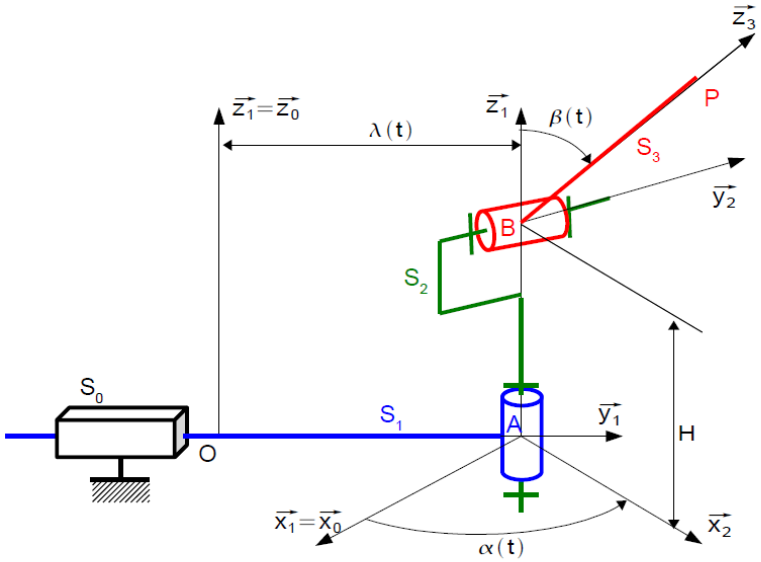
3 « Robot de peinture »

On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture, et projette dessus de la peinture. L'objectif est de déterminer l'amplitude des mouvements du robot par rapport à la carrosserie de voiture.

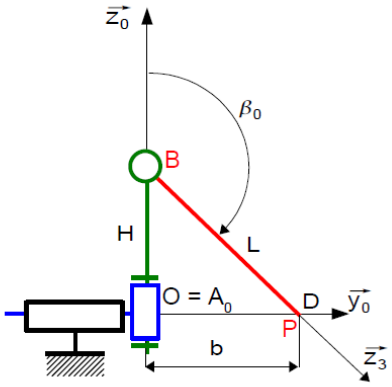




On donne ci-dessous une modélisation de l'architecture du robot.



Shéma cinématique du robot



Position médiane (P est en D)

Hypothèses et notations :

- on associe au bâti **0** le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ avec $\vec{z_0}$ la verticale ascendante ;
- on associe au chariot **1** le repère $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, avec dont la base est confondue avec celle du repère $\mathcal{R}_0$;
- on associe au corps **2** le repère $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ avec $\alpha = (\vec{x_1}, \vec{x_2}) = (\vec{y_1}, \vec{y_2})$;
- on associe au bras **3** le repère $\mathcal{R}_3 = (B, \vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ avec $\beta = (\vec{x_2}, \vec{x_3}) = (\vec{z_2}, \vec{z_3})$;
- enfin, on note $\overrightarrow{OA} = \lambda\, \vec{y_1}$, $AB = H$ et $BP = L$.

Question 7. *Réaliser les figures géométrales permettant d'orienter les bases des différents repères les unes part rapport aux autres.*

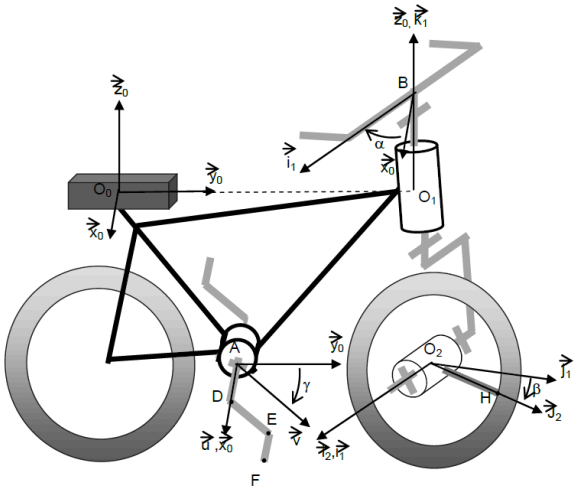
Question 8. *Déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{OP}$ en fonction de λ, α et β puis déterminer ses composantes dans la base du repère $\mathcal{R}_0$.*

Question 9. *Représenter par une figure dans le plan* $(O, \overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{x_0})$ *et une figure dans le plan* $(O, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ *les positions des points* O*,* A*,* B *et* P *du robot lorsque celui-ci vérifie* $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{y_0} = 0$*, c'est-à-dire lorsque le point* P *se déplace dans le plan* $(P, \overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{x_0})$*.*

4 « Fixie »

Les « fixies » sont une famille de vélos à transmission directe (sans roue libre). Ils sont constitués de différents groupes de pièces assemblées entre elles. Ces groupes sont en mouvement les uns par rapport aux autres. On a donc associé à chacun d'entre eux un repère qui permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur reliant deux points de ce solide.





Hypothèses et notations :

- on associe au cadre **0** le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$;
- on associe au pédalier le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, avec $\gamma = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{w})$;
- on associe à la fourche le repère $\mathcal{R}_1 = \left(B_1, \overrightarrow{\imath_1}, \overrightarrow{\jmath_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$ avec $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\imath_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{\jmath_1})$;
- on associe à la roue le repère $\mathcal{R}_2 = \left(O_2, \overrightarrow{\imath_2}, \overrightarrow{\jmath_2}, \overrightarrow{k_2}\right)$ avec $\beta = (\overrightarrow{\jmath_1}, \overrightarrow{\jmath_2}) = \left(\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{k_2}\right)$;
- enfin, on note $\overrightarrow{O_0A} = a\overrightarrow{y_0} - b\overrightarrow{z_0}$, $\left\|\overrightarrow{O_0O_1}\right\| = \ell$, $\left\|\overrightarrow{O_1B}\right\| = h$, $\left\|\overrightarrow{O_1O_2}\right\| = q$, $\left\|\overrightarrow{O_2H}\right\| = r$, $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = d$, $\left\|\overrightarrow{DE}\right\| = e$ et $\left\|\overrightarrow{EF}\right\| = f$.

Question 10. *Réaliser les figures géométrales permettant d'orienter les bases des différents repères les unes part rapport aux autres.*

Question 11. *Exprimer le vecteur* $\overrightarrow{AF}$*.*

Question 12. *Déterminer le vecteur* $\overrightarrow{V_F} = \overrightarrow{FA} \wedge \omega_P \overrightarrow{x_0}$*.*

Question 13. *Déterminer le vecteur* $\overrightarrow{V_H} = \overrightarrow{HO_2} \wedge (\omega_F \overrightarrow{z_0} + \omega_r \overrightarrow{\imath_1})$*.*