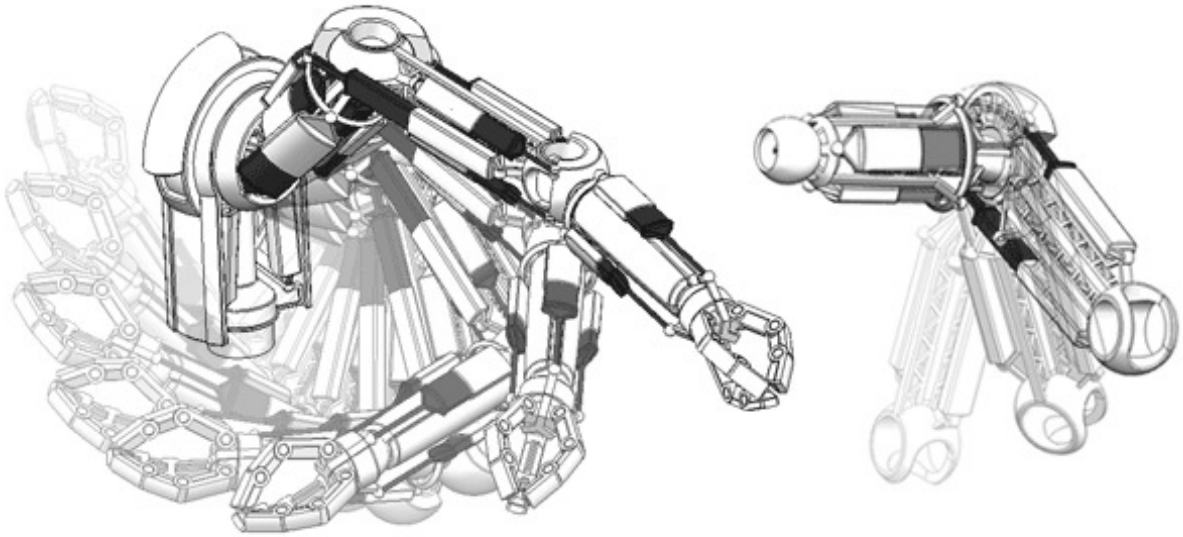
SII – PCSI / Séquence n° 4 – Modélisation des systèmes,
paramétrage cinématique

Modélisation et paramétrage des mécanismes



Objectifs

La finalité de ce cours est de modéliser les relations géométriques entre les solides des ensembles mécaniques et de paramétrer les mouvements possibles entre solides afin de déterminer les liens entre les mouvements d'entrée et de sortie des mécanismes de transformation de mouvement (bielle manivelle, croix de malte, pompe à pistons axiaux et radiaux, etc.).

Table des matières

1 Introduction **3**
- 1.1 Notion de solide indéformable 4
- 1.2 Notion de référentiel 5

2 Placement d'un solide dans un référentiel **6**
- 2.1 Position d'un point d'un solide dans un référentiel 7
- 2.2 Orientation d'un solide dans un référentiel 9

3 Modélisation et paramétrage des mécanismes **10**
- 3.1 Contacts entre solides 11
- 3.2 Liaisons normalisées 12
- 3.3 Graphe de structure 13
- 3.4 Schéma cinématique d'un mécanisme 15
- 3.5 Loi « entrée-sortie » d'un mécanisme 18

Nicolas Mesnier, lycée international Jean Perrin, Lyon

Compléments & mises à jour sur le site des PCSI
https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin
— Version du 1er septembre 2026 —

1 Introduction

Le mot cinématique dérive du grec *kinêma, kinêmatos* qui signifie mouvement et définit la partie de la mécanique qui étudie les mouvements indépendamment des causes qui les provoquent. Dans ce cours, nous adopterons le point de vue de la mécanique classique (non relativiste) pour laquelle il existe une notion de simultanéité temporelle absolue permettant de découpler les notions d'espace et de temps.

À chaque **observateur** on associe un espace affine euclidien à trois dimensions $\mathcal{E}$ (espace de points orienté muni d'une mesure de distance) et un espace de temps absolu paramétré sur l'axe des réels. La notion d'écoulement du temps, de manière régulière et irréversible, est donnée à un observateur par des mouvements particuliers appelés **horloges** (balancier de pendule, vibrations entretenues électriquement d'un quartz ou vibrations d'atomes de césium dans le vide pour les horloges atomiques). Par le choix d'un instant initial et d'une base de temps orientée vers le futur on peut définir une **chronologie**. On mesure le temps en représentant l'état d'une horloge par une coordonnée de temps appelée la **date**, désignée par la lettre t. La **durée** entre deux instants successifs I_1 et I_2, de coordonnées de temps respectives t_1 et t_2, est définie par :

$$\text{durée}\,(I_1, I_2) = |t_2 - t_1|$$

L'unité de la durée est la seconde (s), définie à partir de la fréquence pour laquelle la fluorescence des atomes de césium 133 est maximale et fixée à 9 192 631 770 Hz.

De façon indépendante, chaque observateur peut aussi localiser chaque événement dans l'espace physique (ou d'observation) par le choix d'un système de coordonnées associé au choix d'un **repère spatial**, c'est-à-dire un ensemble point origine et trois vecteurs de base. La notion de distance est indépendante d'un tel choix et est définie entre deux points A et B par la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\text{distance}\,(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

L'unité de la distance est le mètre (m), actuellement défini comme la longueur du chemin parcouru par la lumière dans le vide en 1/299792458 seconde.

Définition 1.1 (Mouvement)
On appelle mouvement toute évolution du placement d'un corps matériel dans un espace d'observation au cours du temps.

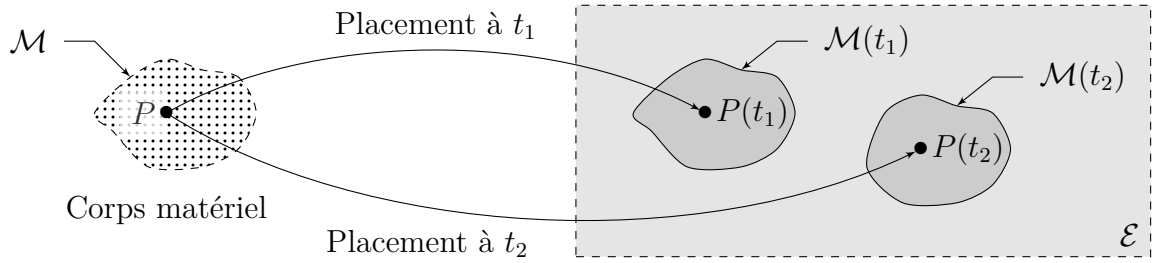


FIGURE 1 – Illustration du placement d'un corps matériel $\mathcal{M}$ dans un espace d'observation $\mathcal{E}$ aux instants t_1 et t_2. À chaque instant t, $P(t)$ est le point de $\mathcal{E}$ occupé par la particule P et $\mathcal{M}(t)$ représente le domaine occupé par le corps matériel.

Un **corps matériel**, qu'il soit fluide (liquide ou gaz) ou solide, est défini par l'ensemble des particules ou points matériels qui le constituent. En tant qu'ensemble de particules, un corps matériel a la même définition (constitution) pour tous les observateurs et existe donc indépendamment de la région de l'espace qu'il occupe à un instant donné de son évolution. On appelle **placement** l'identification (bijection) effectuée par un observateur qui, à un instant donné t, associe à chaque point matériel P d'un corps matériel $\mathcal{M}$ un point $P(t)$ dans son espace d'observation $\mathcal{E}$ (figure 1).

Si le placement se réfère à une description purement géométrique, pour parler de mouvement, il est nécessaire d'ajouter une notion de temps. Les grandeurs étudiées s'appellent déplacement, trajectoire, vitesse et accélération et dépendent toutes du choix d'un **référentiel** (l'association d'un repère d'espace et d'une chronologie).

1.1 Notion de solide indéformable

Dans un cadre de modélisation, les pièces d'un mécanisme seront appelées **solides**. Lorsqu'un solide est soumis à des efforts, il peut se déformer de façon plus ou moins importante. Le plus souvent, les déformations qu'il subit peuvent être considérées comme négligeables et on fera l'hypothèse que tous les solides étudiés sont rigides ou indéformables.

Définition 1.2 (Solide indéformable)
Un solide $\mathcal{S}$ est dit rigide ou indéformable si et seulement si au cours de son évolution les distances entre tous les points qui le constituent sont invariables ; ce qui se traduit par :

$$\forall A, B \in \mathcal{S}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left\| \overrightarrow{AB}(t) \right\| = cste$$

avec $t \in \mathbb{R}$ un paramètre d'évolution (le temps).

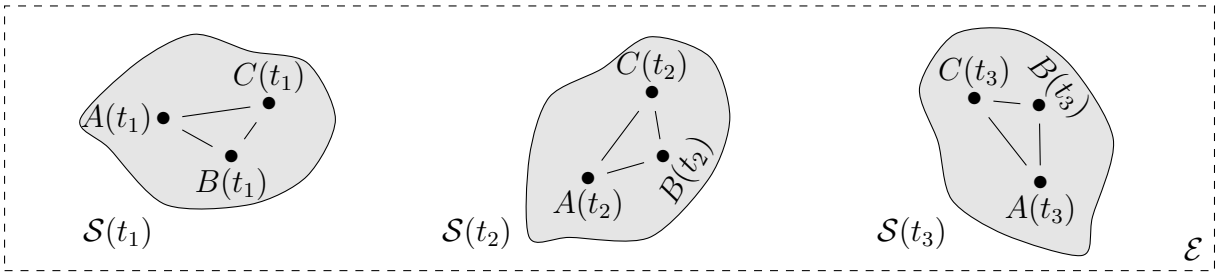
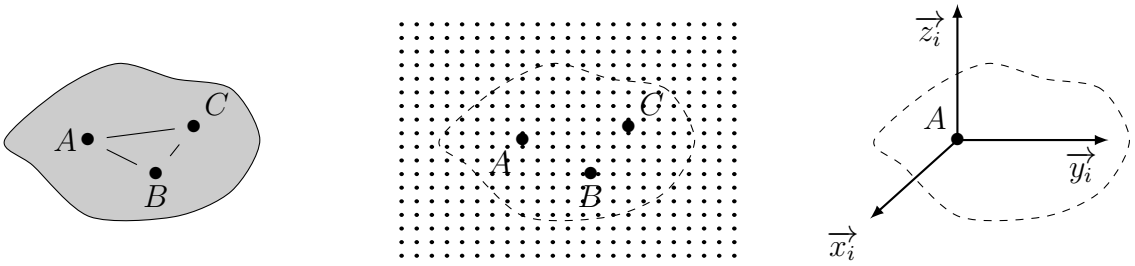


FIGURE 2 – Différents placements d'un solide indéformable pour lequel les distances entre tous ses points restent constantes.

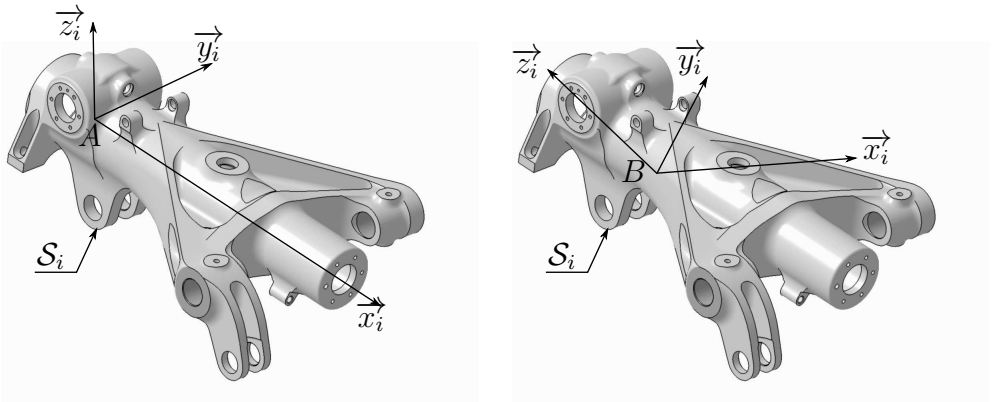
Le caractère rigide ou indéformable d'un solide permet de le modéliser par un espace affine euclidien tridimensionnel, rigide par définition. Or un espace euclidien peut toujours être rapporté à un repère. On associera donc à chaque solide (indéformable) $\mathcal{S}_i$ d'un mécanisme, un **repère spatial** constitué d'un point de l'espace associé au solide $A \in \mathcal{S}_i$ et d'une base $\mathcal{B}_i = (\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$ que l'on prendra toujours orthonormée directe. On le note $\mathcal{R}_i = (A, \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$.



(a) Solide indéformable (b) Modèle de solide indéformable (c) Choix d'un repère

FIGURE 3 – Association d'un repère à un solide indéformable.

Il est important de noter que l'association d'un repère spatial à un solide indéformable revient simplement à choisir un système de coordonnées permettant de positionner tous ses points de façon unique et constante au cours du temps. Seulement, l'association d'un repère à un solide n'est absolument pas unique et il existe une infinité de possibilités, tant par le choix du point du solide comme origine du repère que par le choix de trois vecteurs de base. S'il est toujours possible de passer d'un repère à un autre, nous verrons dans ce qui suit qu'en pratique il est des choix qui sont plus judicieux que d'autres (figure 4).



(a) Choix judicieux (b) Choix quelconque

FIGURE 4 – Exemples d'association d'un repère à un solide.

1.2 Notion de référentiel

En introduisant la notion de solide indéformable, nous venons de définir les objets dont on souhaite étudier les mouvements. Or un mouvement est une notion relative qui met nécessairement en jeu deux entités indissociables :

— un objet observé, dans notre cas un solide indéformable ;
— un référentiel d'étude du mouvement, c'est-à-dire un observateur muni d'une horloge.

Dans ce qui précède, nous avons montré que l'espace associé à un solide indéformable peut être rapporté à un repère (orthonormé direct). On peut donc en déduire que le caractère indéformable des solides leur confère une nature géométrique (conservation des angles et distances) similaire à celle de l'espace physique (ou d'observation). Considérant de plus que le temps agit comme un paramètre immuable et indépendant de l'espace ou des objets

physiques, il semble possible d'étendre la notion de référentiel à toute association d'un repère (d'espace rigide) et d'une chronologie.

$$\text{Référentiel} = \Big\{\underbrace{\text{Point origine}, \text{Base spatiale}}_{\text{Repère}} \ ; \ \underbrace{\text{Instant initial}, \text{Base de temps}}_{\text{Chronologie}}\Big\}$$

Parmi l'ensemble des choix de référentiels possibles, on distinguera :

- les **référentiels galiléens** ou référentiels d'inertie dont l'existence est postulée par la première loi de Newton. Ils sont dits absolus car associés au choix d'un repère fixe dans l'espace physique ;
- les **référentiels mobiles** associés à un **observateur** (muni d'une horloge) en mouvement dans l'espace physique. Ils correspondent au choix d'un repère mobile dans l'espace physique ce qui signifie que le repère associé à chaque solide peut servir de composante spatiale d'un référentiel d'étude du mouvement d'un autre solide.

Remarque 1.1 (Repère et référentiel)
Comme en mécanique newtonienne, le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels, on choisira toujours une seule chronologie de telle sorte qu'un changement de référentiel se limite à un changement de repère. On fera donc souvent l'abus de langage : Repère $\approx$ Référentiel.

2 Placement d'un solide dans un référentiel

La phase préalable à toute étude de cinématique consiste à définir des paramètres permettant de décrire la position relative des solides. Cette étape indispensable prend le nom de **paramétrage**. Comme à chaque solide est associé un repère, placer un solide dans un référentiel revient à créer un paramétrage entre deux repères.

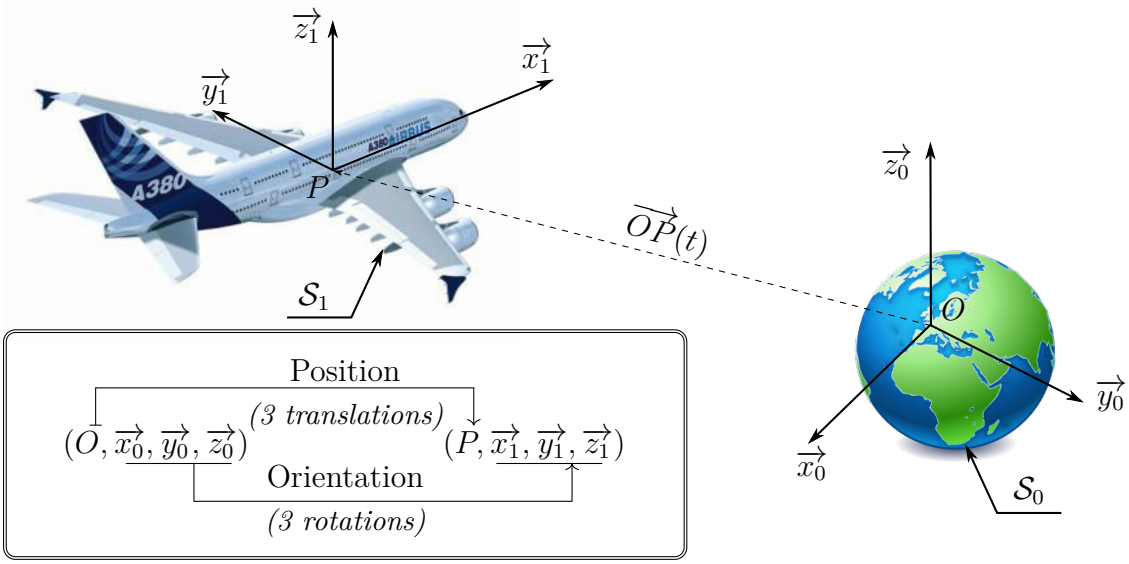


Figure 5 – Placement d'un repère associé à un avion (Airbus A380) dans un repère associé à un observateur terrestre et changement de repère associé.

On note $\mathcal{R}_1 = (P, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ le repère associé à un solide dont on cherche à décrire le mouvement par rapport à un repère de référence noté $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Le placement du repère $\mathcal{R}_1$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ requiert (figure 5) :

— trois paramètres de position associés à la différence de position des points origines ;
— trois paramètres d'orientation associés à la différence d'orientation des trois vecteurs de chacune des deux bases.

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les trois paramètres de position sont trois longueurs et les trois paramètres d'orientation sont trois angles. Les variations temporelles des paramètres de position permettent de décrire des mouvements de translation et celles des paramètres d'orientation des mouvements de rotation. Chaque possibilité de mouvement est appelée **degré de liberté**. Il en existe six au maximum entre deux solides : trois translations et trois rotations. Leur nombre correspond au nombre de paramètres scalaires indépendants nécessaires (et suffisants) pour paramétrer le placement d'un solide dans un repère.

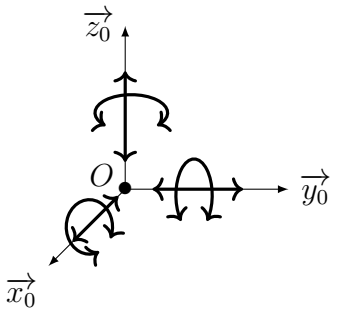


FIGURE 6 – Les six degrés de liberté.

2.1 Position d'un point d'un solide dans un référentiel

Définition 2.1 (Vecteur position)
La position instantanée d'un point $M(t)$ appartenant à un solide $\mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par le ***vecteur position*** $\overrightarrow{OM}(t)$.

Pour exprimer les composantes de ce vecteur, il est indispensable de disposer d'un système de coordonnées pour l'espace associé à $\mathcal{R}_0$. La solution la plus naturelle est d'utiliser un système de coordonnées cartésiennes associé à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera ici $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Mais deux autres systèmes de coordonnées sont aussi couramment employés et définis ci-après.

2.1.1 Coordonnées cartésiennes

Dans un système de coordonnées cartésiennes, la position instantanée d'un point $M(t) \in \mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par les trois coordonnées :

$$x(t) \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z(t) \in \mathbb{R}$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{x_0} + y(t)\overrightarrow{y_0} + z(t)\overrightarrow{z_0}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.

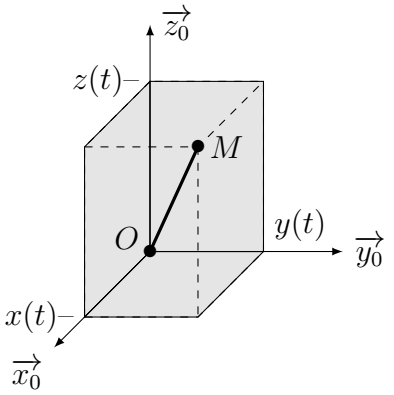


FIGURE 7 – Coordonnées cartésiennes.

2.1.2 Coordonnées cylindriques

Dans un système de coordonnées cylindriques (ou polaires), la position instantanée d'un point $M(t) \in \mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par les trois coordonnées :

$$r(t) \in \mathbb{R}^+, \quad \theta(t) \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad z(t) \in \mathbb{R}$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\overrightarrow{e_r} + z(t)\overrightarrow{z_0}, \qquad \overrightarrow{e_r} \overset{\text{déf.}}{=} \overrightarrow{e_r}\,(\theta(t))$$

dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{z_0})$. En projetant le vecteur radial $\overrightarrow{e_r}$, fonction de l'angle $\theta(t)$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut établir le lien avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \\ z(t) = z(t) \end{cases}$$

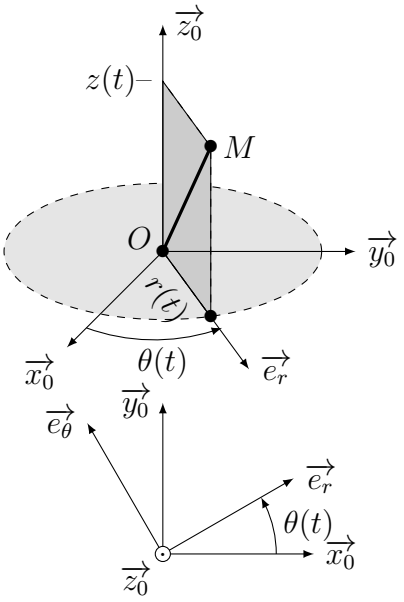


FIGURE 8 – Coordonnées cylindriques.

2.1.3 Coordonnées sphériques

Dans un système de coordonnées sphériques, la position instantanée d'un point $M(t) \in \mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par les trois coordonnées :

$$r(t) \in \mathbb{R}^+, \quad \theta(t) \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad \varphi(t) \in [0, \pi]$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\overrightarrow{e_r}, \qquad \overrightarrow{e_r} \overset{\text{déf.}}{=} \overrightarrow{e_r}\,(\theta(t), \varphi(t))$$

dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$. En projetant le vecteur radial $\overrightarrow{e_r}$, fonction des angles $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut établir le lien avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\theta(t))\sin(\varphi(t)) \\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t))\sin(\varphi(t)) \\ z(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \end{cases}$$

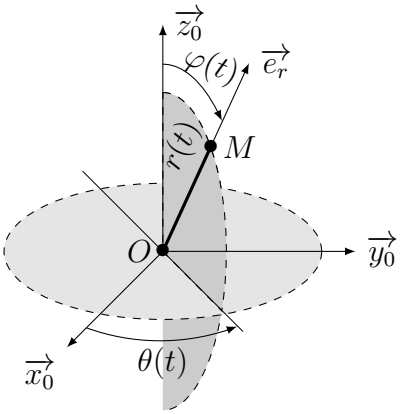


FIGURE 9 – Coordonnées sphériques.

2.2 Orientation d'un solide dans un référentiel

On cherche ici à paramétrer la position relative de deux bases orthonormées directes, l'une par rapport à l'autre. Plusieurs solutions sont possibles, mais elles font toutes intervenir trois rotations successives et deux bases orthonormées directes intermédiaires. La plus courante, basée sur les angles d'Euler, est construite par analogie avec le mouvement de la Terre autour de trois étoiles lointaines formant un repère galiléen. Une autre possibilité est d'utiliser les angles de Cardan ou angles nautiques, comme en aéronautique.

2.2.1 Angles d'Euler

Ce paramétrage fait intervenir trois angles de rotations planes successives dits de précession ψ, de nutation θ et de rotation propre φ. La première rotation permet de définir l'axe nodal ou ligne des nœuds, c'est-à-dire l'axe $(O, \overrightarrow{u})$ pour un repère centré au point O.

$$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}) \xrightarrow[\textit{Précession}]{\mathrm{Rot}\left(\overrightarrow{z_0},\psi\right)} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z_0}) \xrightarrow[\textit{Nutation}]{\mathrm{Rot}\left(\overrightarrow{u},\theta\right)} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}) \xrightarrow[\textit{Rotation propre}]{\mathrm{Rot}\left(\overrightarrow{z},\varphi\right)} (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$$

La composition de rotations planes successives permet de dessiner des figures géométrales (ou de projection) qui sont indispensables pour effectuer les calculs de projection pour la résolution des problèmes.

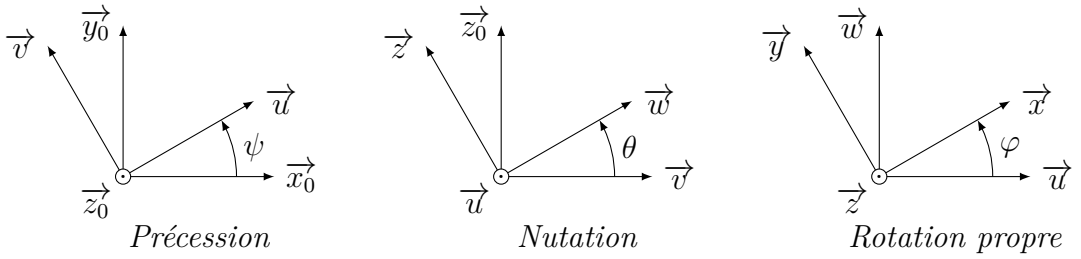


Figure 10 – Les trois angles d'Euler.

Les angles d'Euler sont très souvent utilisés pour représenter l'orientation d'un solide libre dans un espace d'observation de par leur simplicité d'utilisation. Cependant, ils présentent des points singuliers qui empêchent le calcul de l'orientation dans certaines positions. En effet lorsque la deuxième rotation, autour de l'axe $\overrightarrow{u}$, est nulle ou multiple de π, il est impossible de différencier les deux autres rotations car dans ce cas les axes $\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{z}$ sont confondus.

2.2.2 Angles de Cardan

Ce paramétrage est basé sur une orientation privilégiée définie à partir de la direction longitudinale (de l'avion) notée $\overrightarrow{x}$, de la direction transversale notée $\overrightarrow{y}$ et de la direction verticale ascendante notée $\overrightarrow{z}$. Il fait intervenir trois angles de rotations planes successives

dits de roulis γ, de tangage β et de lacet α, parfois abrégés RTL.

$$(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}) \xleftarrow[\textit{Lacet}]{\mathrm{Rot}(\vec{z_0},\alpha)} (\vec{w}, \vec{u}, \vec{z_0}) \xleftarrow[\textit{Tangage}]{\mathrm{Rot}(\vec{u},\beta)} (\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) \xleftarrow[\textit{Roulis}]{\mathrm{Rot}(\vec{x},\gamma)} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

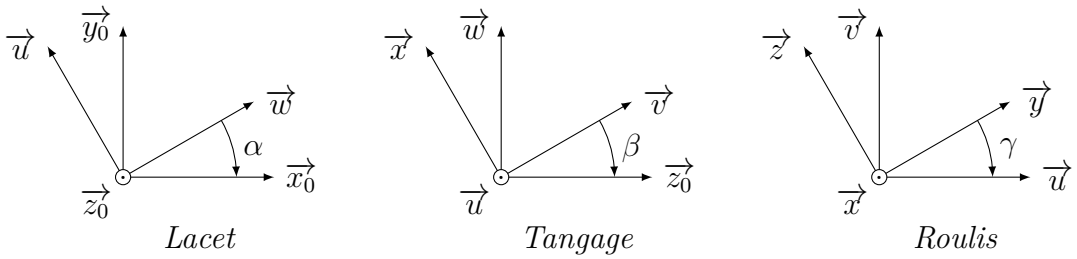
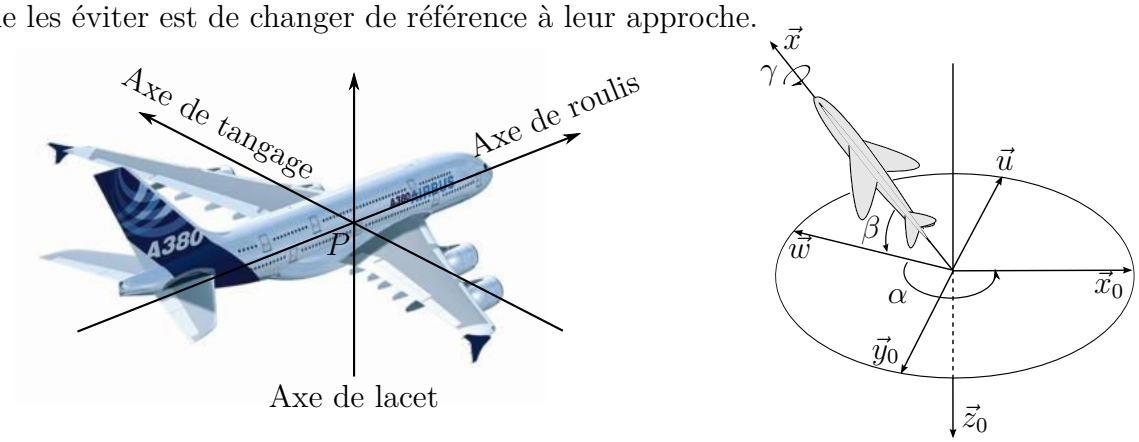


FIGURE 11 – Les trois angles de CARDAN (ou angles nautiques).

Les angles de CARDAN sont très utilisés en aéronautique et la convention aérospatiale considère d'ailleurs la transformation « 3–2–1 » comme transformation de référence (figure 12b). On notera enfin que, comme les angles d'EULER, les angles de CARDAN présentent des points singuliers connus sous le terme de « blocages de CARDAN ». Ces points singuliers apparaissent lorsque le deuxième angle β est égal à $\pm\pi/2$ et le seul moyen de les éviter est de changer de référence à leur approche.



(a) Axes nautiques (b) Angles nautiques

FIGURE 12 – Définition des axes nautiques (a) et des trois angles nautiques (b) utilisés pour paramétrer l'orientation des avions selon les normes `DIN 9300`.

3 Modélisation et paramétrage des mécanismes

Les systèmes étudiés peuvent être constitués de une à plusieurs milliers de pièces liées entre elles pour transmettre des efforts ou des mouvements. Dans cette partie, nous présentons les outils permettant de modéliser et paramétrer ces systèmes en vue d'une étude cinématique.

3.1 Contacts entre solides

Nous avons défini dans ce qui précède le placement libre d'un solide par rapport à un autre, c'est-à-dire possédant six degrés de liberté. Dans la plupart des mécanismes, les solides sont liés entre eux et les mouvements relatifs sont limités par la nature des surfaces en contact. La nature géométrique de ces surfaces de contact — dites fonctionnelles — va autoriser certains mouvements et en interdire d'autres. C'est à partir de l'analyse de ces surfaces que l'on choisit de modéliser un contact entre deux pièces par une (ou plusieurs) liaison(s) cinématique(s). Les différentes associations de surfaces sont présentées dans la table 1.

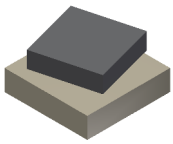
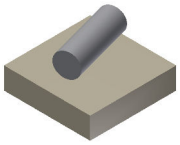
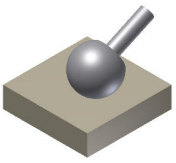
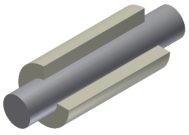
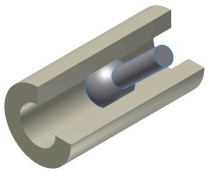
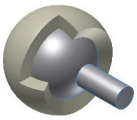
	Plan	**Cylindre**	**Sphère**
Plan	 Contact plan	 Contact linéaire rectiligne (droite)	 Contact ponctuel
Cylindre		 Contact cylindrique	 Contact linéaire annulaire (cercle)
Sphère			 Contact sphérique

TABLE 1 – Différentes associations de surfaces élémentaires et géométrie des contacts.

Chaque mouvement autorisé par la géométrie du contact doit être associé à un paramètre géométrique variable. Si le contact entre deux pièces n'autorise aucun mouvement, les pièces sont dites en liaison complète.

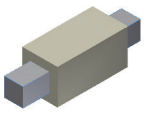
Définition 3.1 (Classe d'équivalence)
Une classe d'équivalence est un ensemble de pièces en liaison complète ou encastrement, démontable ou non. Toutes les pièces faisant partie d'une même classe d'équivalence ont donc le même mouvement lors du fonctionnement du mécanisme.

3.2 Liaisons normalisées

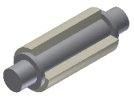
Les liaisons permettent de supprimer un certain nombre de degrés de liberté pour satisfaire une exigence de mouvement donnée. Les différentes liaisons simples sont construites par association des six contacts élémentaires. Les modèles de liaisons sont basés sur une géométrie parfaite, c'est-à-dire sans jeu. Ils sont répertoriés dans ce qui suit avec un paramétrage adapté donné dans la table 2.

Liaison encastrement La liaison encastrement est une liaison complète entre deux pièces, sans aucun degré de liberté.

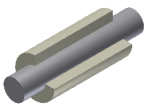
Liaison glissière Une liaison glissière entre deux solides S_1 et S_2 autorise un mouvement de translation suivant une seule direction. Cette liaison ne possède donc qu'un seul degré de liberté.



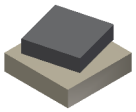
Liaison pivot Une liaison pivot entre deux solides S_1 et S_2 autorise un mouvement de rotation autour d'un seul axe. Cette liaison ne possède donc qu'un seul degré de liberté.



Liaison pivot glissant Une liaison pivot glissant entre deux solides S_1 et S_2 autorise deux mouvements : un mouvement de rotation et un mouvement de translation suivant le même axe. Cette liaison possède donc deux degrés de liberté.



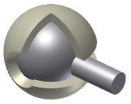
Liaison appui-plan Une liaison appui-plan entre deux solides S_1 et S_2 permet de bloquer une translation et deux rotations. Cette liaison possède donc trois degrés de liberté.



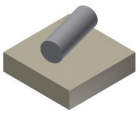
Liaison sphérique Une liaison sphérique entre deux solides S_1 et S_2 autorise toutes les rotations mais aucune translation. Cette liaison possède donc trois degrés de liberté.



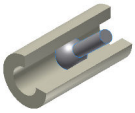
Liaison sphérique à doigt Une liaison sphérique à doigt entre deux solides S_1 et S_2 correspond à une liaison sphérique pour laquelle une des trois rotations a été bloquée. Cette liaison ne possède donc que deux degrés de liberté.



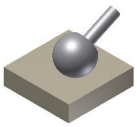
Liaison cylindre-plan Une liaison cylindre-plan entre deux solides S_1 et S_2 autorise deux rotations et deux translations. Cette liaison possède donc quatre degrés de liberté.



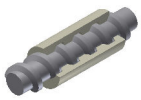
Liaison sphère-cylindre Une liaison sphère-cylindre entre deux solides S_1 et S_2 correspond à une liaison sphérique pour laquelle une des trois translations a été libérée. Cette liaison possède donc quatre degrés de liberté.



Liaison sphère-plan Une liaison sphère-plan entre deux solides S_1 et S_2 ne bloque qu'une translation selon la normale au plan. Tous les autres mouvements sont possibles. Cette liaison possède donc cinq degrés de liberté.



Liaison hélicoïdale Une liaison hélicoïdale entre deux solides est caractérisée par son pas p, à gauche ou à droite, tel que les mouvements de rotation et de translation suivant son axe soient liés. Cette liaison possède donc un seul degré de liberté.



3.3 Graphe de structure

Ce graphe formalise l'ensemble des mouvements possibles d'un mécanisme. Pour le représenter, il faut tout d'abord chercher les classes d'équivalence du système, c'est-à-dire les ensembles de pièces qui n'ont pas de mouvement relatif entre elles. Chaque classe d'équivalence est représentée par un sommet du graphe et chaque arc entre les sommets représente la liaison entre ces classes. On rappelle que les liaisons sont définies à partir des surfaces de contact. Si deux classes d'équivalence n'ont pas de contact géométrique, aucun arc ne relie les deux sommets.

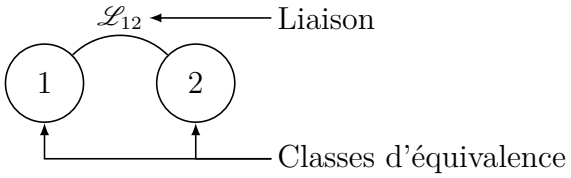


FIGURE 13 – Éléments du graphe de structure.

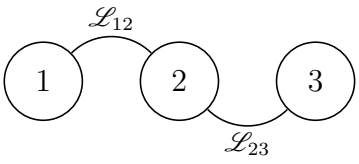
On peut détailler les différentes topologies de graphes de structures (ou de liaisons) que l'on peut rencontrer à partir de l'analyse des cycles. On appelle **cycle** (ou boucle ou chaîne fermée) un chemin fermé extrait d'un graphe de structure tel qu'en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet. On appelle **nombre cyclomatique** d'un graphe de structure, noté γ, le nombre de cycles indépendants qui le constituent. La théorie des graphes montre que ce nombre ne dépend que du nombre de sommets et du nombre d'arcs et s'écrit :

$$\gamma = L - S + 1$$

où L est le nombre de liaisons et S le nombre de solides. Pour chaque cycle, on peut écrire deux équations de fermeture géométrique : une équation vectorielle linéaire associée aux différences de position des centres des repères et une fermeture angulaire associée aux différences d'orientation des vecteurs de base. La projection de chacune de ces équations conduit à trois équations scalaires dans le cas d'un problème plan.

3.3.1 Chaîne ouverte

Un mécanisme sans cycle a un nombre cyclomatique nul : $\gamma = 0$. Ce genre de graphe est typique de la robotique. On peut avoir un déplacement maximal en fin de chaîne avec un minimum de liaisons.



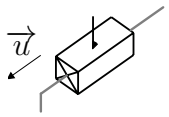
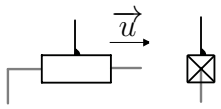
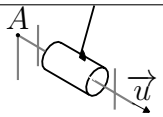
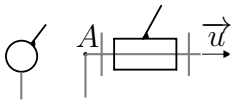
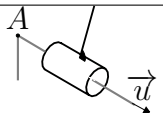
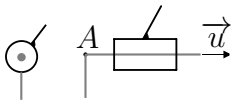
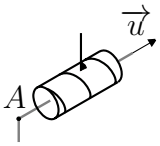
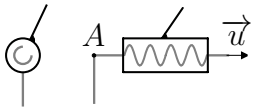
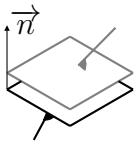
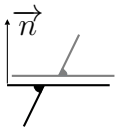
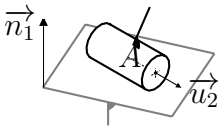
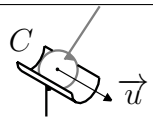
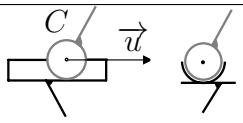
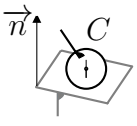
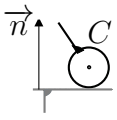
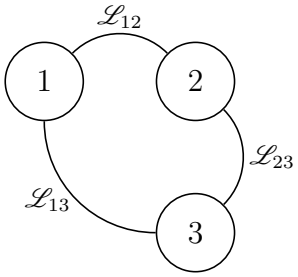
Liaison	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Repère local	Mobilité(s)
Glissière			direction $\vec{u}$	1 translation
Pivot			axe $(A, \vec{u})$	1 rotation
Pivot glissant			axe $(A, \vec{u})$	1 translation 1 rotation
Hélicoïdale			axe $(A, \vec{u})$	1 translation & 1 rotation liées
Appui-plan			normale $\vec{n}$	2 translations 1 rotation
Sphérique			centre C	3 rotations
Sphérique à doigt			centre C	2 rotations
Cylindre-plan			normale $(A, \vec{n_1})$ + axe $(A, \vec{u_2})$	2 translations 2 rotations
Sphère-cylindre			centre C + axe $(C, \vec{u})$	1 translation 3 rotations
Sphère-plan			normale $(C, \vec{n})$	2 translations 3 rotations

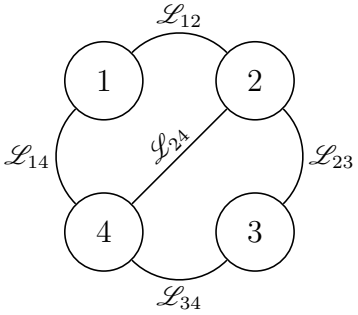
TABLE 2 – Liaisons élémentaires.

3.3.2 Chaîne fermée



Dans ce type de structure, les liaisons permettent de relier l'ensemble des classes d'équivalence en un seul cycle fermé : $\gamma = 1$. Les paramètres des liaisons du système ne sont pas indépendants. On peut alors écrire deux équations vectorielles de fermeture géométrique : une linéaire et une angulaire.

3.3.3 Chaîne complexe



Dans la pratique, les systèmes sont souvent basés sur des chaînes complexes. On peut alors faire apparaître plusieurs cycles fermés : $\gamma > 1$. Dans l'exemple on a 3 cycles, mais il suffit d'en parcourir 2 pour être passé par tous les solides et toutes les liaisons, donc seuls $\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$ cycles sont indépendants. On peut alors écrire 2γ équations de fermeture géométrique conduisant à 6γ équations scalaires.

3.4 Schéma cinématique d'un mécanisme

Le schéma cinématique minimal est un outil de communication technique qui doit traduire la structure d'un système d'un point de vue mécanique. Il permet d'exprimer la fonction globale d'un système technique sans préjuger des solutions retenues, en explicitant l'utilité des différentes liaisons entre les pièces et justifiant les mouvements des pièces et composants technologiques constituant le mécanisme étudié. Le fonctionnement cinématique est traduit suivant une représentation graphique des liaisons et éléments de contact. Un « bon » schéma cinématique doit être clair, lisible, précis et concis, en faisant apparaître de façon évidente le principe de fonctionnement. C'est pour cette raison que l'on va réduire le schéma à sa plus simple expression afin de faire apparaître clairement les mobilités contenues dans ce mécanisme en vue d'une étude cinématique.

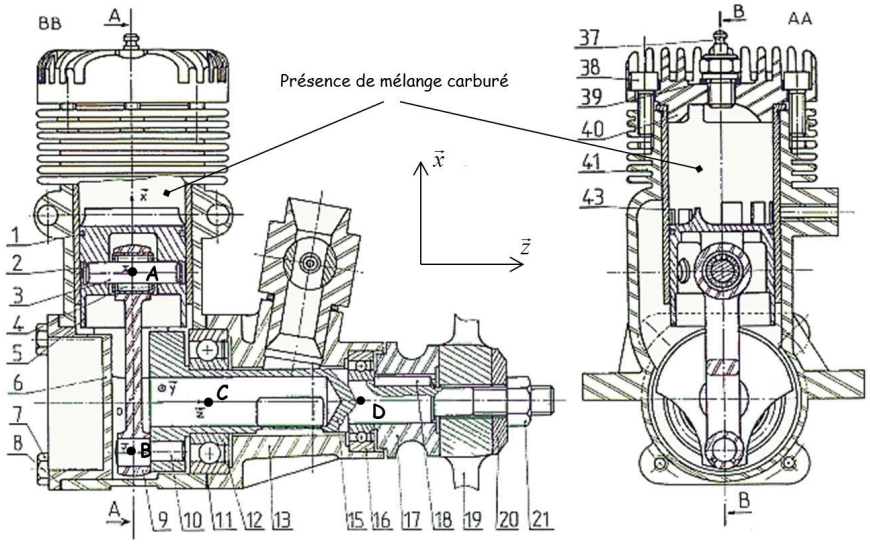
Méthodologie de construction du schéma cinématique Commençons par préciser que le mécanisme que l'on se propose d'étudier est en général décrit par un certain nombre de documents (plan d'ensemble, nomenclature, dessins de définition, notice, etc.) à partir desquels il faut successivement :

1. Identifier les entrées et sorties du mécanisme, c'est-à-dire :
   - les pièces qui reçoivent un mouvement de l'extérieur (entrées) ;
   - les pièces qui transmettent un mouvement vers l'extérieur (sorties).
2. Identifier les chaînes cinématiques internes au mécanisme, c'est-à-dire les pièces qui interviennent successivement dans la transmission d'un mouvement ;
3. Déterminer les classes d'équivalence et les nommer avec le nom de la pièce la plus importante.
4. Identifier la nature des contacts entre les différentes classes d'équivalence et associer à un contact ou un ensemble de contacts un modèle de liaison élémentaire.

5. Construire le graphe de structure.
6. Construire le schéma cinématique (d'architecture) en trois étapes :
   — mise en place des paramètres des liaisons (points, axes) sur un schéma vierge ;
   — représentation des schémas normalisés des liaisons ;
   — raccord entre les liaisons.
7. Simplifier le schéma cinématique en supprimant les liaisons redondantes et/ou en remplaçant des ensembles de liaisons par des liaisons cinématiquement équivalentes afin d'obtenir un **schéma cinématique minimal**.

Remarque 3.1 (Représentation du schéma cinématique minimal)
Dans la mesure du possible, on se limitera à une représentation plane du schéma cinématique minimal si elle est suffisante pour décrire le fonctionnement cinématique du mécanisme étudié.

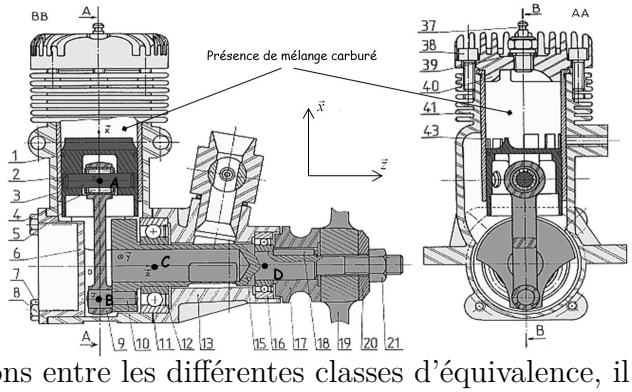
Exemple 3.1 (Moteur thermique d'aéromodélisme)
Le support de l'étude est un moteur thermique deux temps utilisé en aéromodélisme. On donne ci-après le dessin d'ensemble du système, que l'on appellera *micromoteur*.



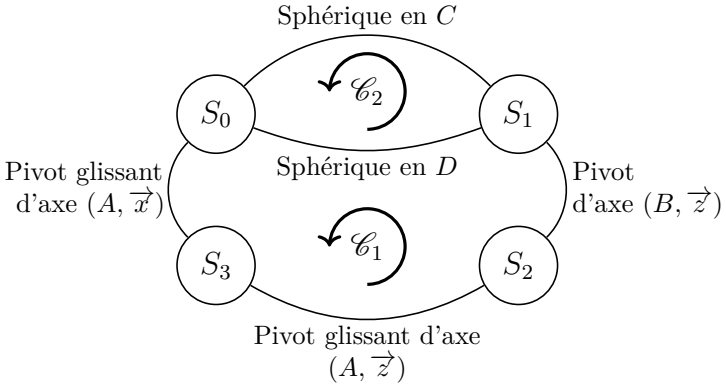
1. Pour identifier l'entrée et la sortie, commençons par rappeler qu'un moteur thermique permet de créer une énergie mécanique de rotation à partir d'une explosion. L'entrée se fera donc sur le piston (1) et la sortie sur l'hélice (19) liée au vilebrequin (15).
2. Le mécanisme ne comporte qu'une seule chaîne cinématique de type transmission de puissance passant successivement par le piston (1), l'axe (3), la bielle (9) et le vilebrequin (15).
3. Pour identifier les classes d'équivalence, on recherche toutes les pièces en liaison complète que l'on colorie sur le plan d'ensemble avec une même couleur (par

classe d'équivalence). Il vient quatre classes d'équivalence :

- Carter
  $S_0 = \{6, 7, 8, 11, 13, 37, 38, 39, 40, 41, 43\}$
- Vilebrequin
  $S_1 = \{10, 15, 17, 19, 20, 21\}$
- Bielle $S_2 = \{9\}$
- Piston $S_3 = \{1, 2, 3, 5\}$



4. Pour identifier la nature des liaisons entre les différentes classes d'équivalence, il est nécessaire d'identifier la nature des contacts. L'analyse du dessin d'ensemble a permis d'identifier :
   - un contact cylindre-cylindre entre S_0 et S_3 que l'on peut modéliser par une liaison pivot glissant d'axe $(A, \overrightarrow{x})$;
   - un contact cylindre-cylindre entre S_2 et S_3 que l'on peut modéliser par une liaison pivot glissant d'axe $(A, \overrightarrow{z})$;
   - un contact cylindre-cylindre et deux contacts plan-plan (un de chaque côté) entre S_1 et S_2 que l'on peut modéliser par une liaison pivot d'axe $(B, \overrightarrow{z})$;
   - deux contacts sphériques au niveau des roulements à billes (12) et (16) que l'on peut modéliser pour chacun par une liaison sphérique, respectivement centrée au point C et au point D.
5. Pour réaliser le graphe de structure, on place quatre nœuds correspondants aux classes d'équivalence que l'on relie avec les cinq arcs correspondants aux liaisons identifiées.

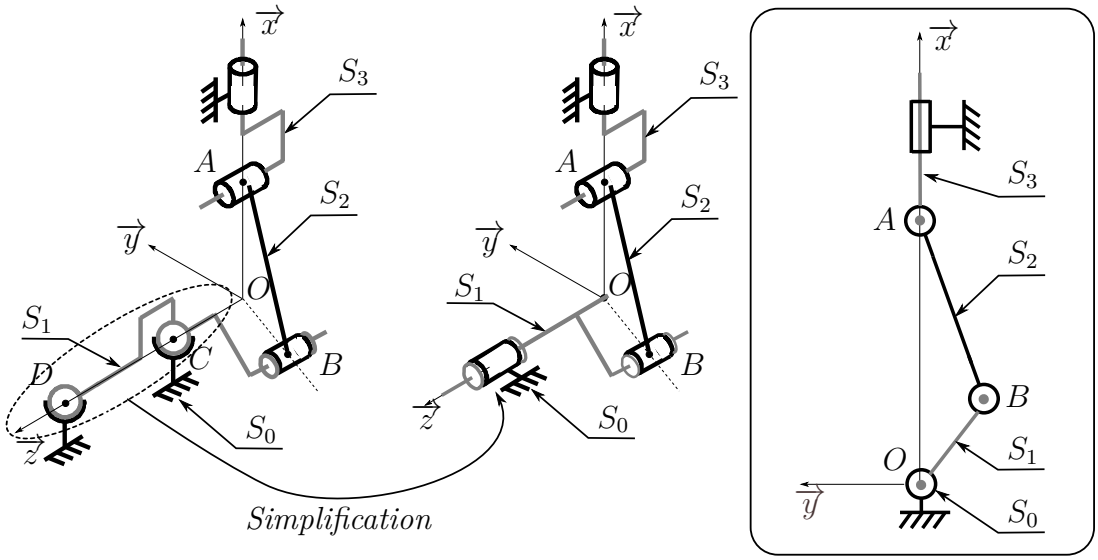


Avec cinq liaisons ($L = 5$) et quatre solides ($S = 4$), ce graphe de structure comporte

$$\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$$

cycles indépendants (notés $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur le graphe). Les deux liaisons entre S_0 et S_1 sont dites en parallèles.

6. On peut réaliser le schéma cinématique avec un point de vue tridimensionnel.



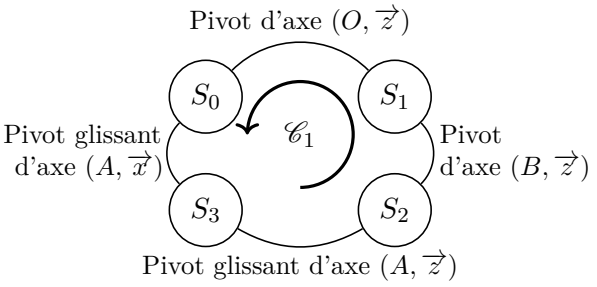
7. Le point de vue tridimensionnel permet d'identifier immédiatement que si notre étude ne concerne que le fonctionnement cinématique du mécanisme, alors les deux liaisons sphériques peuvent être associées pour former une seule liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$. (*Nous reviendrons sur cette notion dans le cours de théorie des mécanismes*). À partir de cette simplification, il est clair qu'une schématisation plane suffira amplement à décrire le fonctionnement cinématique du système et c'est cette dernière que l'on appellera le schéma cinématique minimal du micromoteur.

3.5 Loi « entrée-sortie » d'un mécanisme

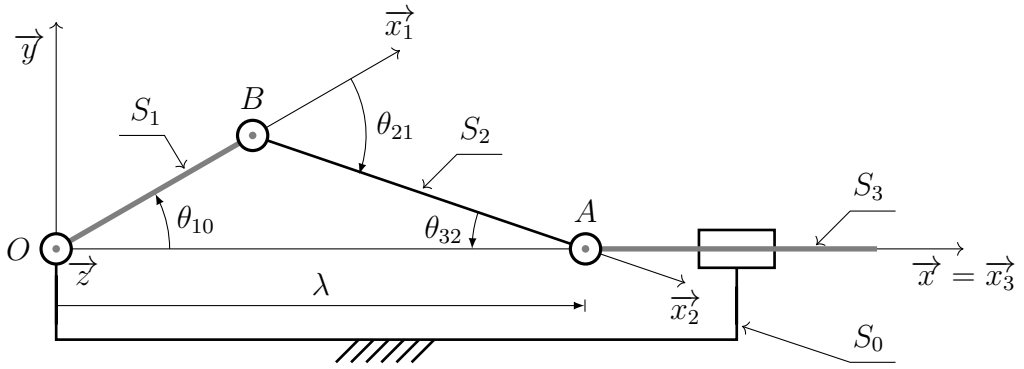
À partir d'un schéma cinématique paramétré d'un mécanisme comportant au moins un cycle, on peut réaliser autant de fermetures géométriques que de cycles indépendants en écrivant pour chaque cycle deux relations géométriques vectorielles (une linéaire et une angulaire) faisant intervenir les points caractéristiques du schéma cinématique. En projetant ensuite les deux expressions obtenues pour chaque cycle suivant les trois vecteurs d'une même base, on peut déterminer autant de relations que de cycles entre les paramètres géométriques. Quand cette relation permet de relier un paramètre d'entrée et un paramètre de sortie, la relation sera une loi « entrée-sortie ».

Exemple 3.2 (Moteur thermique d'aéromodélisme)

Le schéma cinématique minimal du micromoteur établi fait apparaître un seul cycle ($\mathscr{C}_1$). Il est donc possible d'écrire deux équations vectorielles de fermeture géométrique. Pour écrire ces équations, il est nécessaire de paramétrer le schéma cinématique minimal avec :



— les repères associés à chaque solide ;
— la définition des caractéristiques géométriques utiles de chaque solide ;
— le paramétrage de chaque liaison.



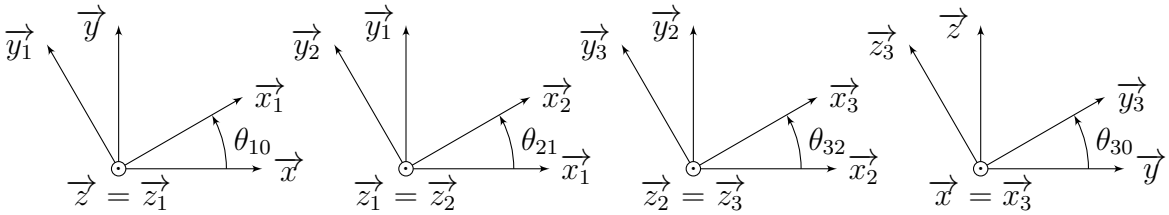
Paramétrage
On note e l'excentration du vilebrequin S_1 et ℓ_b l'entraxe de la bielle S_2, deux constantes géométriques telles que $\overrightarrow{OB} = e\ \overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{BA} = \ell_b\ \overrightarrow{x_2}$. Il n'est pas nécessaire de paramétrer la longueur du piston S_3 puisqu'elle ne change rien au mouvement, tout comme le carter S_0. À chaque liaison pivot ou pivot glissant, on associe un angle :

— $\theta_{10} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1})$ l'angle permettant de définir la position angulaire du vilebrequin par rapport au carter ;
— $\theta_{21} = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ l'angle permettant de définir la position angulaire de la bielle par rapport au vilebrequin ;
— $\theta_{32} = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ l'angle permettant de définir la position angulaire du piston par rapport à la bielle ;
— $\theta_{30} = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y_3}) = (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z_3})$ l'angle permettant de définir la position angulaire du piston par rapport au carter.

Enfin, on définit la translation autorisée par la liaison pivot glissant avec un paramètre linéaire λ tel que la position instantanée du piston par rapport au carter soit $\overrightarrow{OA} = \lambda\ \overrightarrow{x}$.
Le paramétrage de chacune des liaisons du mécanisme nécessite donc cinq paramètres :

$$\theta_{10}, \quad \theta_{21}, \quad \theta_{32}, \quad \theta_{30} \quad \text{et} \quad \lambda.$$

On trace ensuite immédiatement les figures géométrales associées à la définition de chaque angle et qui serviront de support de calcul des produits scalaires et vectoriels.



Fermeture géométrique angulaire
Nous sommes ici dans cas particulier de rotations autour d'axes perpendiculaires pour

lequel la fermeture géométrique angulaire peut s'écrire simplement. De plus, comme aucune rotation ne se fait autour de l'axe $\overrightarrow{y}$, la fermeture angulaire se limite à deux équations scalaires suivant les axes $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{z}$ qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} /\overrightarrow{x} : \quad & -\theta_{30} = 0 \\ /\overrightarrow{z} : \quad & \theta_{32} + \theta_{21} + \theta_{10} = 0 \end{aligned}$$

À partir de la relation suivant $\overrightarrow{x}$, on peut en déduire qu'il n'y aura pas de mouvement de rotation du piston par rapport au carter ($\theta_{30} = 0$). La seconde relation permet de savoir que les trois angles θ_{10}, θ_{21} et θ_{32} sont liés. En pratique, c'est l'angle θ_{21} qui ne sera pas considéré comme un paramètre cinématique du problème et simplement exprimé en fonction des deux autres angles s'il s'avère utile pour calculer une projection.

Fermeture géométrique linéaire

La relation de fermeture géométrique linéaire s'écrit :

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = e\ \overrightarrow{x_1} + \ell_b\ \overrightarrow{x_2} - \lambda\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

Comme les positions relatives des points sont constantes selon l'axe $\overrightarrow{z}$, seules les projections suivant les axes $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ peuvent apporter des informations. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} /\overrightarrow{x} : \quad & e\ \cos(\theta_{10}) + \ell_b\ \cos(\theta_{32}) - \lambda = 0 \\ /\overrightarrow{y} : \quad & e\ \sin(\theta_{10}) - \ell_b\ \sin(\theta_{32}) = 0 \end{aligned}$$

De la deuxième expression on tire celle de $\cos(\theta_{32}) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\theta_{32})}$ sous la forme :

$$\sin(\theta_{32}) = \frac{e}{\ell_b}\sin(\theta_{10}) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(\theta_{32}) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{e}{\ell_b}\right)^2 \sin^2(\theta_{10})}$$

où le signe de $\cos(\theta_{32})$ reste indéterminé. Pour lever cette indétermination, il est nécessaire de remarquer que λ doit être maximal lorsque θ_{10} est nul, ce qui implique que le signe sera un plus. Il vient alors pour la première projection :

$$\lambda = e\ \cos(\theta_{10}) + \sqrt{(\ell_b)^2 - e^2 \sin^2(\theta_{10})}$$

Cette expression ne relie que deux paramètres cinématiques λ et θ_{10}, respectivement associés au mouvement de translation du piston par rapport carter en entrée et au mouvement de rotation du vilebrequin par rapport carter en sortie. C'est donc la loi entrée–sortie du mécanisme recherchée.

* *
*