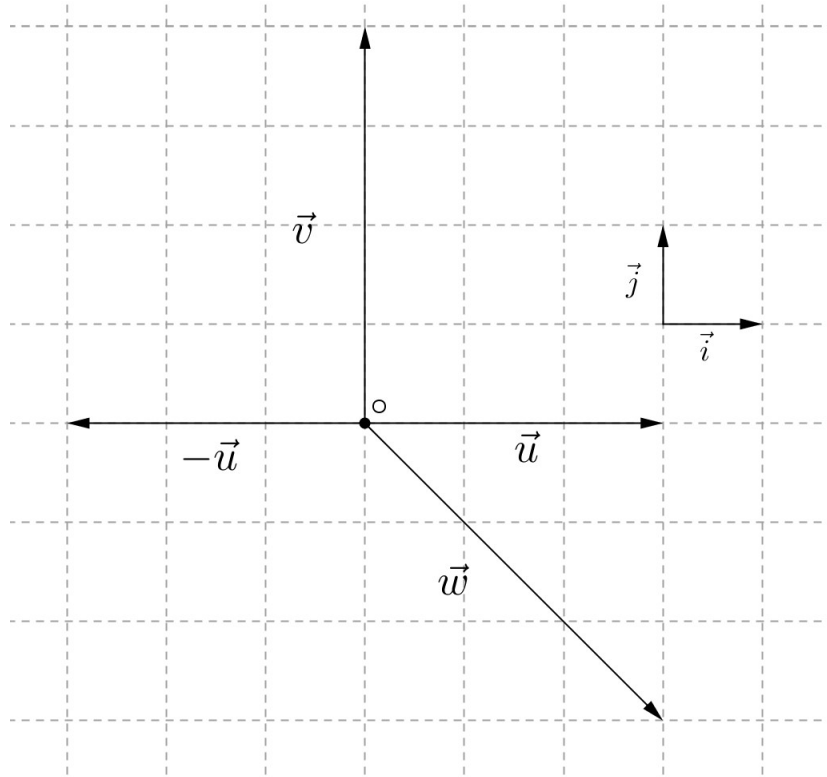


Mesure des angles

Un angle géométrique est compris entre 0° et 180° (ou entre 0 et π radians). Il est défini par trois points ou deux droites.

Un angle orienté entre deux vecteurs non nuls en revanche a une valeur réelle quelconque et donc un signe. Cette valeur en radians est définie à un multiple entier de 2π près. On note $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Sur le dessin, $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$ (on tourne de 90° dans le sens trigonométrique pour passer de $\vec{u}$ à $\vec{v}$).

Mais on a aussi $(\vec{u}, \vec{v}) = 5\pi/2$ (on fait un tour complet et on rajoute un quart de tour), ou encore $(\vec{u}, \vec{v}) = -3\pi/2$ (on tourne de 270° dans le sens horaire).

De même, $(\vec{w}, \vec{v}) = 3\pi/4$ (on tourne de 135° dans le sens trigonométrique) ou bien $(\vec{w}, \vec{v}) = -5\pi/4$ (un demi-tour et encore 45° dans le sens horaire).

Enfin, $(\vec{u}, \vec{v}) = -\pi/2$ ou encore $(\vec{u}, \vec{v}) = 3\pi/2$...

Un vecteur $\vec{F}$ peut-être repéré par ses coordonnées cartésiennes dans une base orthonormée. Sur l'exemple :

$$\vec{u} = 3\vec{i}, \vec{v} = 4\vec{j}, \vec{w} = 3\sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j})$$

ou bien par sa longueur F (on parle de norme d'un vecteur et on note alors $\|\vec{F}\|$) et l'angle orienté entre $\vec{i}$ et $\vec{F}$. Cet angle s'appelle l'angle polaire du vecteur $\vec{F}$. Sur l'exemple,

pour $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = 3$, $\theta = 0$

pour $\vec{v}$: $\|\vec{v}\| = 4$, $\theta = \pi/2$

pour $\vec{w}$: $\|\vec{w}\| = 3\sqrt{2}$, $\theta = -\pi/4$

Le lien entre les deux modes de repérage est donné par la formule

$$\vec{F} = F \cos(\theta) \vec{i} + F \sin(\theta) \vec{j}$$

On peut remplacer la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par n'importe quelle base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, l'angle polaire θ étant alors $(\vec{e}_1, \vec{F})$.

Quand on détermine les composantes d'un vecteur $\vec{F}$ (une force par exemple) dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on dit qu'on a **projeté le vecteur** $\vec{F}$ sur les axes portés par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ respectivement. Cela se fait couramment en physique.

La composante $F \cos(\theta) \vec{i}$ est la projection de $\vec{F}$ sur $\vec{i}$ et le coefficient $F \cos(\theta)$ est égal au produit scalaire de $\vec{F}$ avec $\vec{i}$:

$$F \cos(\theta) = \vec{F} \cdot \vec{i}$$

De même,

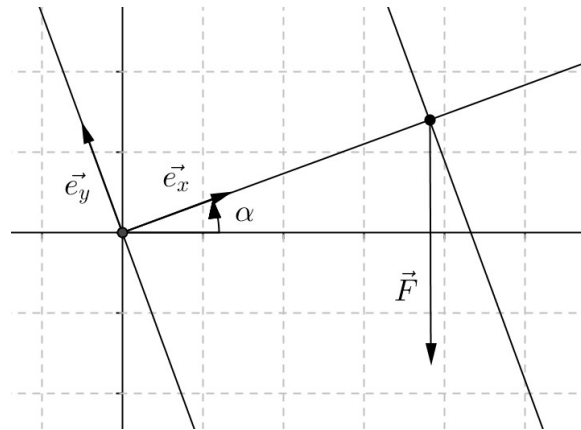
$$F \sin(\theta) = \vec{F} \cdot \vec{j}$$

Rappel : le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel

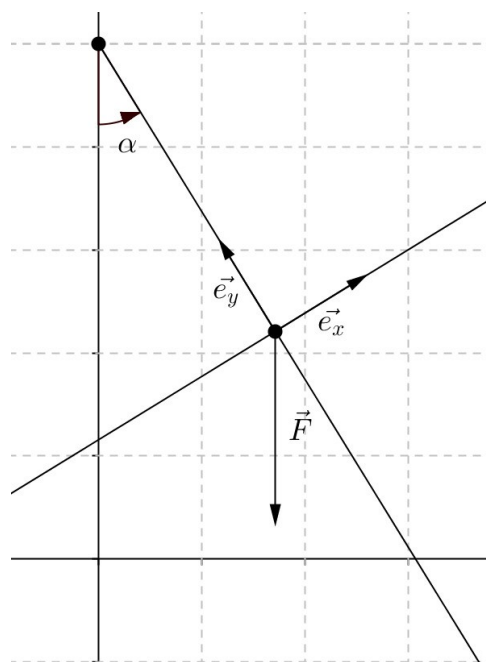
$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

(donc $\vec{F} \cdot \vec{j} = F \cos(\vec{F}, \vec{j}) = F \cos(\pi/2 - \theta) = F \sin(\theta)$).

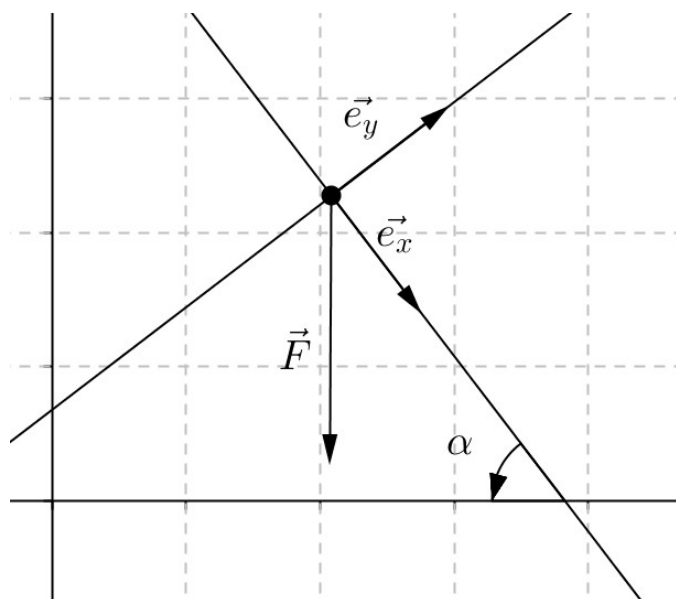
- 1) Calculer en fonction de α les angles $(\vec{e}_x, \vec{F})$ et $(\vec{e}_y, \vec{F})$.
Décomposer alors le vecteur $\vec{F}$ dans la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ (on notera F la norme du vecteur $\vec{F}$).



- 2) Même question



3) Même question



Calculs d'angles dans le triangle

Rappels

La somme des angles dans un triangle est égale à 180° .

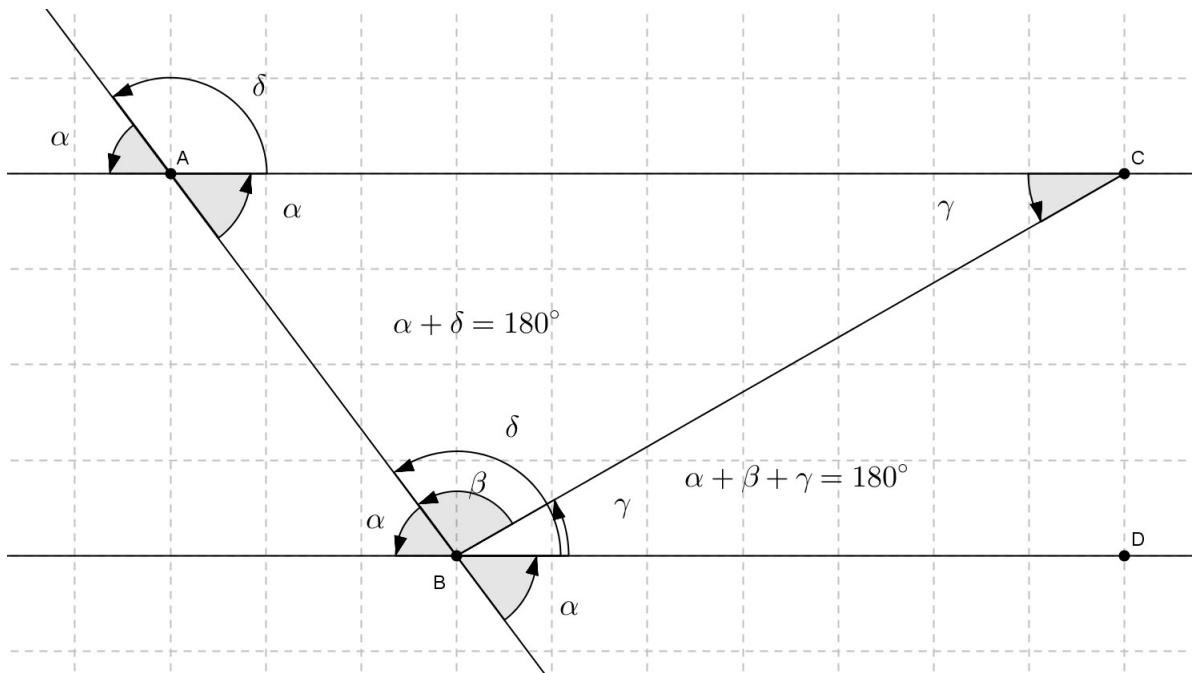
Une droite intercepte deux droites parallèles selon le même angle (angles alternes-internes)

Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

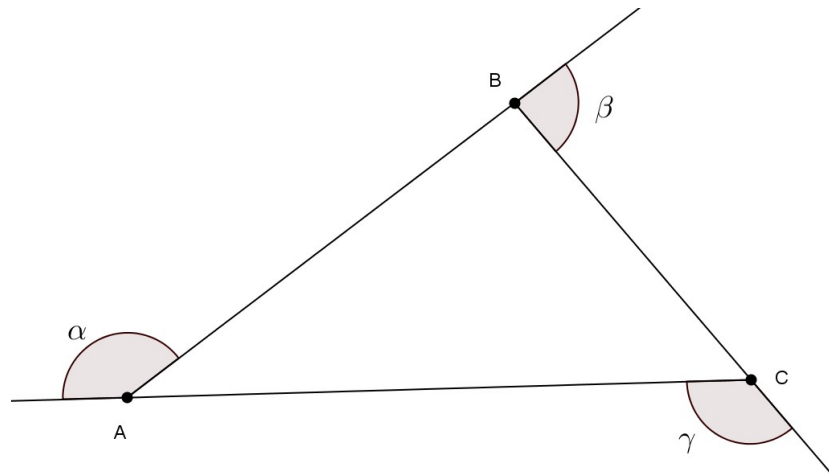
Tout est sur la figure : $(AC) \parallel (BD)$

noter l'angle α présent quatre fois : deux fois en A (angles opposés par le sommet) et deux fois en B

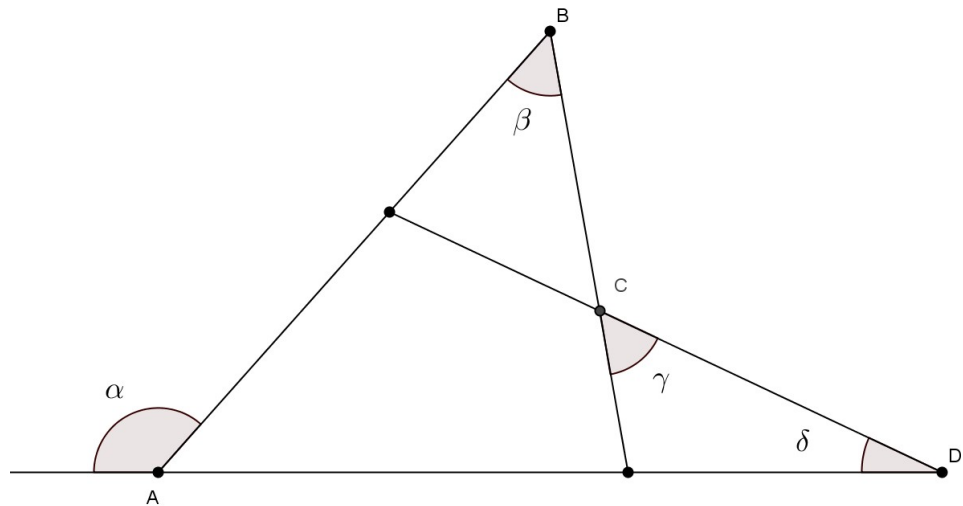
$\gamma = \widehat{ACB} = \widehat{DBC}$ (angles alternes-internes)



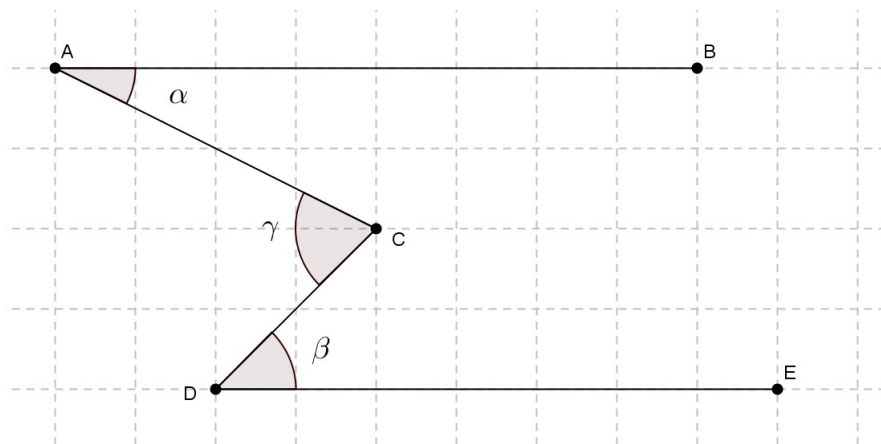
- 1) Sur la figure ci-dessous, prouver que les angles géométriques α , β et γ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$.



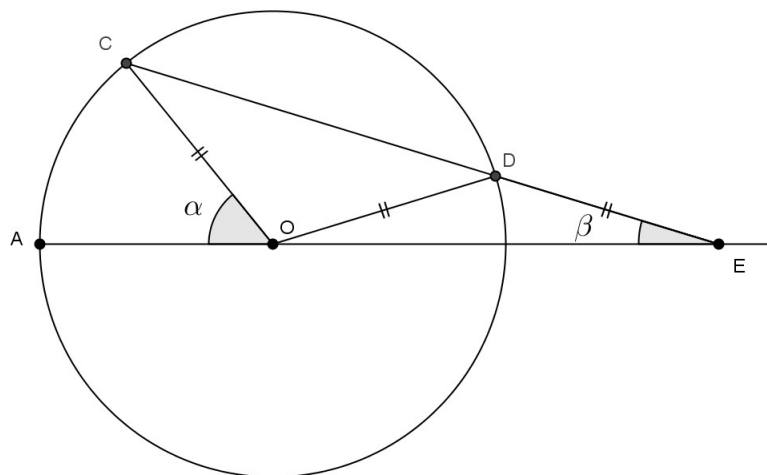
- 2) Sur la figure ci-dessous, prouver que les angles géométriques α , β , γ et δ vérifient $\alpha = \beta + \gamma + \delta$.



- 3) Sur la figure ci-dessous à gauche, (AB) et (DE) étant parallèles. Prouver que $\gamma = \alpha + \beta$.

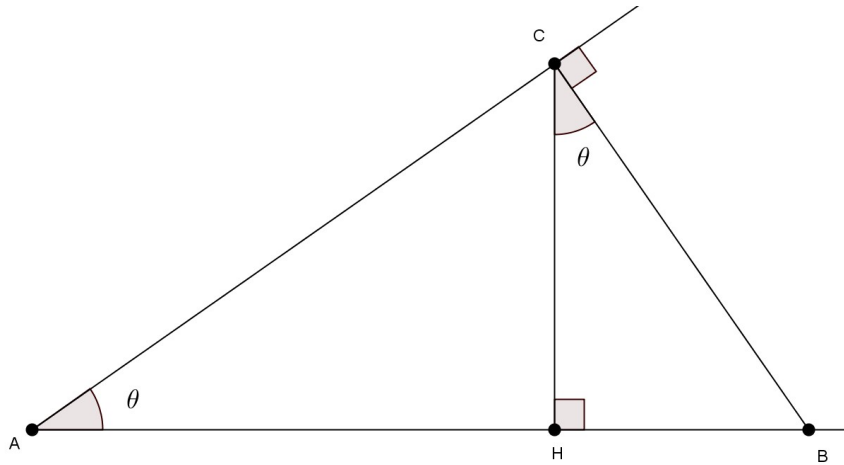


- 4) Sur la figure ci-dessous, O est le centre du cercle, les points A , O , E sont alignés et DE est égal au rayon du cercle. Prouver que $\alpha = 3\beta$.



Calculs de longueurs

Relations dans le triangle rectangle



Prouver que $\theta = \widehat{BAC} = \widehat{HCB}$. Cet angle est noté θ .

La formule de Pythagore dans ABC donne la relation fondamentale de la trigonométrie :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$
$$\cos(\theta) = \frac{AH}{AC} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{CH}{AC}$$

La pente (par rapport à l'horizontale) de la droite (AC) est le réel

$$p = \frac{CH}{AH} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Le réel $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ s'appelle la tangente de l'angle θ et se note $\tan(\theta)$. C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AC) .

On a $\cos(\theta) = \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$, d'où

$$AH = \frac{AC^2}{AB}$$

Avec le produit scalaire, on peut aussi écrire

$$AC^2 = \vec{AC} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{AC} \cdot \vec{AB} = (\vec{AH} + \vec{HC}) \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} = AH \times AB$$

De même $BH = \frac{BC^2}{AB}$

Exprimer $\cos(\theta)$ dans les triangles ABC et BHC et $\tan(\theta)$ dans les triangles AHC et BHC et en déduire que

On a aussi $\cos(\theta) = \frac{AC}{AB} = \frac{CH}{BC}$, d'où

$$CH = \frac{AC \times BC}{AB}$$

et $\tan(\theta) = \frac{CH}{AH} = \frac{BH}{CH}$, d'où

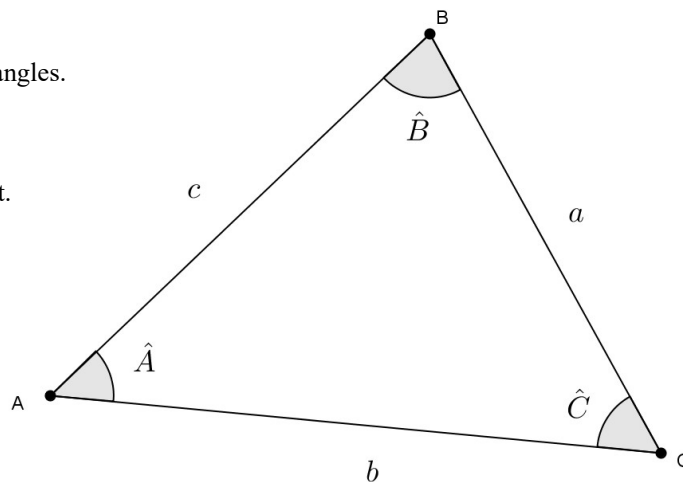
$$CH^2 = BH \times AH$$

Résolution du triangle

Résoudre un triangle, c'est calculer ses trois côtés et ses trois angles.

On considère un triangle ABC .

On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les angles géométriques (entre 0 et 180° donc) en A , B , C respectivement.



Il y a trois cas où on sait résoudre le triangle sans ambiguïté :

- les trois côtés sont connus
- On connaît deux côtés et l'angle déterminé par ces deux côtés (par exemple, b , c et $\widehat{A}$ connus)
- On connaît un côté et les deux angles adjacents (par exemple, a , $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ connus).

Le cas où on connaît deux côtés et un angle qui n'est pas celui déterminé par les deux côtés connus, conduit en général à deux possibilités.

Pour résoudre le triangle, on dispose de la formule de Al Kashi et de la loi des sinus.

$$\text{Formule de Al Kashi} \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} \end{cases}$$

L'aire S d'un triangle ABC se calcule par $\frac{1}{2} b \times c \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} a \times b \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} c \times a \sin \widehat{B}$, d'où la loi des sinus :

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{\sin \widehat{B}}{b}$$

Applications des formules

- Les 3 longueurs a , b , c sont connues : par la formule d'Al-Kashi, on en déduit $\cos \widehat{A}$, $\cos \widehat{B}$ et $\cos \widehat{C}$. On en déduit $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$
- On connaît un angle et les deux côtés adjacents, par exemple a , b connus ainsi que $\widehat{C}$: on en déduit c par Al-Kashi puis les deux autres angles toujours par Al-Kashi (on préfère utiliser Al-Kashi car la loi des sinus ne donne que le sinus des angles, d'où une ambiguïté pour l'angle).
- On connaît un côté et les deux angles adjacents : par exemple a ainsi que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ connus. On en déduit $\widehat{A}$ puis

$$b = a \frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}} \quad \text{et} \quad c = a \frac{\sin \widehat{C}}{\sin \widehat{A}}$$

- Si on connaît a , b et $\widehat{A}$, la loi des sinus permet de calculer $\sin \widehat{B}$ ce qui laisse deux possibilités a priori pour $\widehat{B}$. Quant

à Al-Kashi, il permet de voir c comme solution d'une équation du second degré, d'où également deux possibilités a priori. D'où l'ambiguïté mentionnée plus haut.

Exemples

Pour les applications numériques, faire attention aux unités d'angles quand on applique une des fonctions sin, cos ou tan : l'angle doit être exprimé en degrés ou en radians selon le mode sélectionné sur la calculatrice.

Utiliser également les touches $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ de votre calculatrice (elle peuvent se noter aussi arccos, arcsin) pour calculer un angle. Le résultat sera en degrés ou radians selon le mode sélectionné.

- 1) On donne $a = 12$, $b = 7$, $c = 9$.

Par Al-Kashi, on trouve $\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx -0.11$, d'où $\widehat{A} \approx 1,68$ rad ou 96.4°

De même, $\cos(\widehat{B}) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0.82$, d'où $\widehat{B} \approx 35.4^\circ$

$$\widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 48,2^\circ$$

- 2) On donne $a = 20$, $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 72^\circ$.

Le troisième angle est $\widehat{A} = 180 - 45 - 72 = 63^\circ$

La loi des sinus donne $b = a \sin(\widehat{B})/\sin(\widehat{A}) \approx 15.87$

La longueur c se calcule alors soit par Al-Kashi, soit par la loi des sinus :

$$c = a \sin(\widehat{C})/\sin(\widehat{A}) \approx 21,34$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C}) \approx 455,69 \text{ puis } c \approx 21,34$$

- 3) On donne $a = 12$, $b = 9$, $\widehat{A} = 60^\circ$

La loi des sinus donne $\sin(\widehat{B}) = b \sin(\widehat{A})/a \approx 0,65$. D'où $\widehat{B} \approx 40,50^\circ$ ou $\widehat{B} \approx 180 - 40,50 = 139,50$. Ce dernier cas est impossible car il y a déjà un angle de 60° et que la somme des trois angles doit faire 180° .

On a donc $\widehat{B} \approx 40,50^\circ$ et $\widehat{C} \approx 180 - 60 - 40,50 \approx 79,5^\circ$

On calcule enfin c soit par Al-Kashi, soit par la loi des sinus :

$$c = a \sin(\widehat{C})/\sin(\widehat{A}) \approx 13,62$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C}) \approx 185,64 \text{ puis } c \approx 13,62$$

On aurait pu aussi débiter les calculs par Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A})$$

d'où c qui est solution du trinôme $c^2 - 9c - 63 = 0$. Les deux racines sont $(9 \pm \sqrt{333})/2 = 13,62$ ou $-4,62$.

Le trinôme ayant une racine positive et une racine négative, seule la racine positive va conduire à une solution acceptable.

- 4) On donne $a = 9$, $b = 10$, $\widehat{A} = 60^\circ$

La loi des sinus donne $\sin(\widehat{B}) = b \sin(\widehat{A})/a \approx 0,96$. D'où $\widehat{B} \approx 74,21^\circ$ ou $\widehat{B} \approx 180 - 74,21 = 105,79$. Cette fois, les deux valeurs sont possibles.

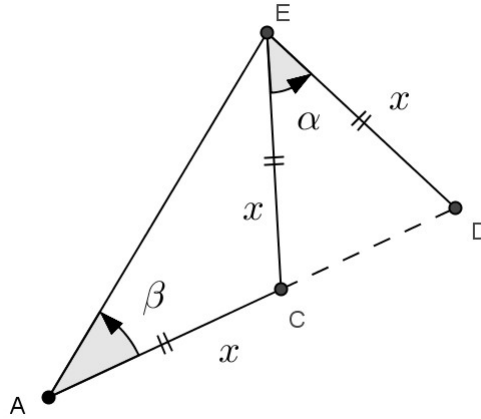
Pour $\widehat{B} \approx 74,21^\circ$, on a $\widehat{C} \approx 180 - 60 - 74,21 \approx 45,79^\circ$ et $c = a \sin(\widehat{C})/\sin(\widehat{A}) \approx 7,45$

Pour $\widehat{B} \approx 105,79^\circ$, on a $\widehat{C} \approx 180 - 60 - 105,79 \approx 14,21^\circ$ et $c = a \sin(\widehat{C})/\sin(\widehat{A}) \approx 2,55$

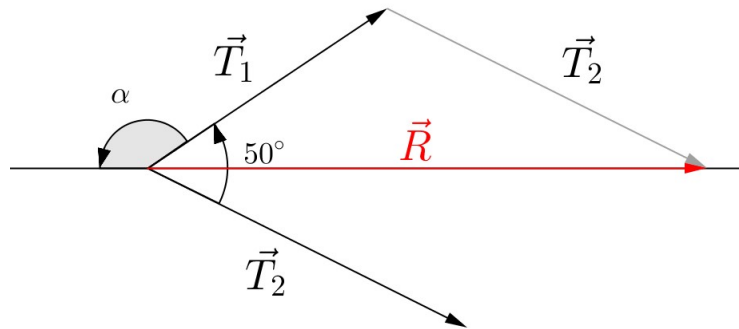
- 5) On donne $a = 7$, $b = 9$, $\widehat{A} = 60^\circ$

Al-Kashi donne $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A})$, soit $c^2 - 9c + 32 = 0$. Il n'y a pas de racine réelle, donc aucun triangle solution. Ici, le cercle centré en C et de rayon 7 ne peut pas couper la droite (AB) .

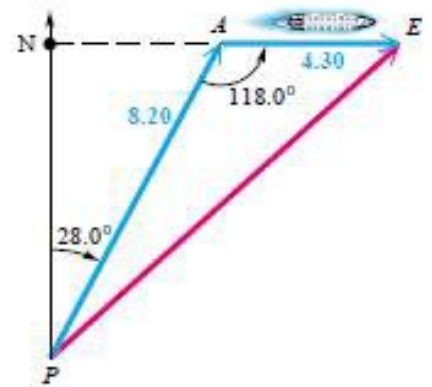
- 1) Sur la figure ci-dessus à droite, calculer β en fonction de α .
Calculer x/CD en fonction de α .



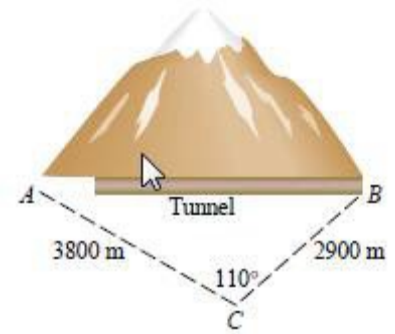
- 2) Sur la figure ci-dessous, on connaît les longueurs $T_1 = 48$, $T_2 = 60$
calculer la résultante R et l'angle α .



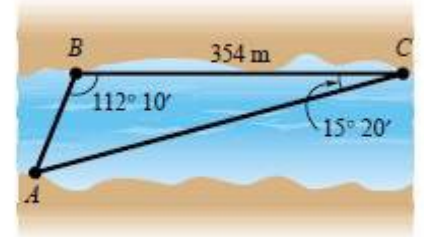
- 3) Un navire quitte le port P sous une trajectoire rectiligne formant un angle de 28° par rapport au Nord. Au bout de 8,2 km, il change de direction comme indiqué sur le dessin et parcourt encore 4,3 km. Quelle est alors sa distance au port ? Quel est l'angle entre (PE) et le Nord ?



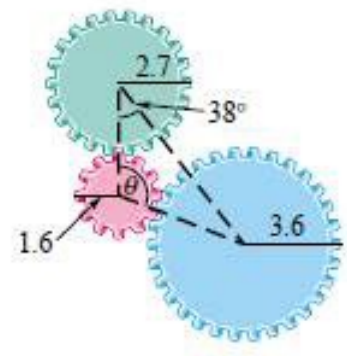
- 4) Pour mesurer la longueur d'un tunnel, on observe l'entrée et la sortie depuis un troisième point C . On mesure $AC = 3800$ m, $BC = 2900$ m, et $\widehat{C} = 110^\circ$. En déduire la longueur du tunnel.



- 5) Calculer la distance AB entre les deux rives avec les données du dessin.



- 6) Trois engrenages sont représentés ci-contre.
On note A le centre du cercle de rayon 2.7, B le centre de celui de rayon 1.6, C celui de rayon 3.6.
Calculer d'abord AC en utilisant la formule d'Al Kashi puis calculer l'angle θ exprimé en radians et en degrés.



- 7) Pour prédire les éruptions du volcan Mauna Loa situé sur l'île d'Hawaï, les scientifiques étudient le mouvement de ce volcan en effectuant des mesures à partir de deux autres volcans (figure ci-contre).
- a) On donne $AB = 36,16916$ km, $AC = 45,28170$ km, $\widehat{A} = 58,56989^\circ$.
Calculer BC .
- b) On donne $AB = 36,16916$ km, $BC = 40,62698$ km, $\widehat{A} = 58,56989^\circ$.
Calculer $\widehat{B}$.

