

TD 22

Dénombrement.

Revoir l'Ex 5 TD 6

Ex 0 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E et $f : \left(\begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right).$

- 1) Donner une CNS sur A et B pour que f soit injective.
- 2) Donner une CNS sur A et B pour que f soit surjective.
- 3) En déduire une CNS sur A et B pour que f soit bijective.
- 4) Désormais f est bijective.
 - a) Expliciter f^{-1} .
 - b) On suppose que E est un ensemble fini. Qu'en déduit-on sur les cardinaux de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(E)$? Vérifier cette égalité compte tenu des conditions vérifiées par A et B .

$$1) (X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B) \Rightarrow \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases} \Rightarrow X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B).$$

Alors, si $A \cup B = E$ alors $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B) \Rightarrow X = Y$. Et ainsi, si $A \cup B = E$ alors f est injective.

$$2) \text{ Soit } (H, K) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B). f(X) = (H, K) \Leftrightarrow \begin{cases} H = X \cap A \\ K = X \cap B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H = X \cap A \\ K = X \cap B \\ H \cup K \subset X \end{cases}.$$

- 3) si $A \cup B \neq \emptyset$ alors il existe un élément x commun à A et B et le couple $(\{x\}, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent par f car si on imagine un instant que $(\{x\}, \emptyset)$ admet un antécédent X alors X contient $\{x\} = \{x\} \cup \emptyset$ et par suite $X \cap A = \{x\} = X \cap B$ donc $X \cap B \neq \emptyset$ ce qui contredit $f(X) = (\{x\}, \emptyset)$. Donc, si $A \cup B \neq \emptyset$ alors f n'est pas surjective.

Par contre si $A \cup B = \emptyset$ alors $H \cup K$ est un antécédent de (H, K) par f .

Donc f est surjective si et si $A \cup B = \emptyset$.

- 4) f est bijective si et si (A, B) est une partition de E .

$$5) f^{-1} : \left(\begin{array}{l} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ (H, K) \mapsto H \cup K \end{array} \right).$$

$$6) \text{card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) = \text{card}(\mathcal{P}(E)). \text{ Vérif: } \text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(E)$$

$$7) \text{card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) = \text{card}(\mathcal{P}(A)) \times \text{card}(\mathcal{P}(B)) = 2^{\text{card}(A)} \times 2^{\text{card}(B)} = 2^{\text{card}(A) + \text{card}(B)} = 2^{\text{card}(E)} = \text{card}(\mathcal{P}(E))$$

Ex 1 Soit E un ensemble et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une partition de E .

- 1) Justifier que : $\forall x \in E, \exists ! i \in \llbracket 1, n \rrbracket / x \in A_i$.
Pour tout $(x, y) \in E^2$, on dit que $x \sim y$ lorsque x et y appartiennent au même A_i .
- 2) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E .
- 3) Soit $x \in E$, on note $\bar{x} = \{y \in E / x \sim y\}$ appelée la classe d'un élément x de E . Décrire $\bar{x}$.

Ex 2

- 1) Un digicode est constitué d'un chiffre d'une lettre A ou B et d'un autre chiffre dans cet ordre. Combien de codes existe-t-il ?
- 2) J'ai dans ma garde-robe 17 pantalons, 15 jupes, 28 tee-shirts, 7 chemisiers, 3 paires de collants de couleurs différentes et 30 pulls. Combien ai-je de tenues différentes ?
- 3) En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Combien de caractères peut-on coder avec un octet (8 chiffres binaires ordonnés) ?
- 4) Combien de trinômes de colles différents peut-on former dans une classe de PCSI de 35 élèves ?
- 5) Au loto, il y a 49 numéros, une grille de loto est composée de 6 numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?
- 6) Une plaque d'immatriculation française est composée de deux lettres puis trois chiffres et deux lettres : $AB - 123 - CD$. Les lettres I, O, U ne sont jamais utilisés, les couples SS et WW non plus. Combien de plaques différentes peut-on fabriquer ?

Ex 3 Dans un lycée de 1200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument et 453 ne font ni sport, ni musique. Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens.

Ex 4

- 1) Un digicode est constitué de trois chiffres compris entre 0 et 9 et d'une lettre A ou B .
 - a) Combien de codes existe-t-il ne comportant que des chiffres distincts ?
 - b) Combien de codes existe-t-il ne comportant que des chiffres dans un ordre strictement croissant ?
 - c) Combien de codes existe-t-il comportant exactement deux chiffres égaux ?

- d) Combien de codes existe-t-il comportant au moins un 1 ?
- e) Soit $k \in \{0, \dots, 18\}$. Combien de codes dont la somme des deux premiers chiffres vaut k existe-t-il ?
- 2) Une agence matrimoniale souhaite faire un sondage auprès de ses clients. Elle teste son questionnaire sur un échantillon de 4 personnes parmi les 300 clients dont 120 femmes.
- Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
 - Quel est le nombre d'échantillons différents ne contenant aucune femme ?
 - Quel est le nombre d'échantillons différents contenant au moins un homme et une femme ?
- 3) Dans une urne, il y a 15 boules numérotées de 1 à 15, les boules 1 à 5 sont blanches, les autres sont noires
- On tire cinq boules simultanément.
 - Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
 - Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires ?
 - On tire successivement 5 boules sans remise.
 - En tenant compte de l'ordre combien y-a-t-il de tirages possibles ?
 - Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires dans tout ordre ?

Ex 5 Déterminer le nombre d'anagrammes (sans sens) des mots suivants : SMARTPHONE, SOURISpet BONBONNE.

Ex 6

- Calculer le nombre de surjections de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$.
 - Calculer le nombre d'applications de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissantes.
 - Calculer le nombre de surjections de $\{0,1,\dots,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$.
 - Calculer le nombre de surjections de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$.
 - Déterminer le nombre d'applications f de $\{1,\dots,10\}$ dans $\{1,10\}$ telles que, si n pair alors $f(n)$ pair.
 - Déterminer le nombre d'applications injectives de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui admettent 1 dans leur image.
- 1) Comme $\{1,2,3\}$ est un ensemble fini, f est une surjection de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$ si et seulement si f est une permutation de $\{1,2,3\}$.
Donc le nombre de surjections de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$ est égal au nombre de permutations de $\{1,2,3\}$ donc est égal à $3!$.
- 2) Construire une application de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissante revient à
- Choisir les p images distinctes (car f strictement croissante donc injective).
 - Ordonner ces images pour savoir qui est $f(1), f(2), \dots, f(p)$.

En effet, on peut d'abord remarquer qu'une application strictement croissante de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ étant injective, les entiers $f(1), f(2), \dots, f(p)$ sont tous distincts dans $\{1,\dots,n\}$. Par conséquent, si $p > n$ alors $\{1,\dots,n\}$ ne contient pas p valeurs distinctes donc il n'existe aucune application strictement croissante de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$. De plus, considérons $y_1, y_2, \dots, y_p$ des entiers distincts choisis parmi les n entiers $1, 2, \dots, n$. Ordonnons ces entiers de manière strictement croissante : $y_{i_1} < y_{i_2} < \dots < y_{i_p}$ tels que $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} = \{1, 2, \dots, p\}$. Alors il existe une et une seule application de $\{1, 2, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ strictement croissante qui vérifie : $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(k) = y_{i_k}$. Nous venons de démontrer qu'en notant A l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1, 2, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ et B l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$ contenant p éléments, $\varphi: (f \mapsto \{f(1), f(2), \dots, f(p)\})$ est bijective de A sur B .

Il existe donc autant d'applications strictement croissantes de $\{1, 2, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ que de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Ainsi, le nombre d'applications de $\{1, 2, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ strictement croissantes est $\binom{n}{p}$.

- 3) Construire une surjection de $\{0, 1, \dots, n\}$ sur $\{1, 2, \dots, n\}$, c'est :
- Choisir l'élément c de $\{1, 2, \dots, n\}$ qui aura deux antécédents
 - Choisir les deux éléments a et b de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ qui auront la même image
 - Construire une bijection de $\{0, 1, 2, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$ sur $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{c\}$.
- En effet, considérons f une surjection de $\{0, 1, \dots, n\}$ sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Alors f n'est pas une bijection (car $\text{card}\{0, 1, \dots, n\} \neq \text{card}\{1, 2, \dots, n\}$) et tout élément de $\{1, 2, \dots, n\}$ doit avoir au moins un antécédent par f . Comme $\text{card}\{0, 1, \dots, n\} = \text{card}\{1, 2, \dots, n\} + 1$, un unique élément de $\{1, 2, \dots, n\}$ aura exactement deux antécédents par f et les autres éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ auront exactement un antécédent par f . puisque
- si deux éléments distincts a et b de $\{1, 2, \dots, n\}$ ont deux antécédents (par f) chacun : a_1, a_2, b_1, b_2 alors $\text{card}(\{0, 1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, b_1, b_2\}) = n + 1 - 4 = n - 3 < n - 2 = \text{card}(\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a, b\})$ donc il n'existe pas de surjection de $\{0, 1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ sur $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$... donc une telle f n'existe pas.
- De même si un élément a de $\{1, 2, \dots, n\}$ a trois antécédents (par f) : a_1, a_2, a_3 , $\text{card}(\{0, 1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}) = n + 1 - 3 = n - 2 < n - 1 = \text{card}(\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a\})$ donc il n'existe pas de surjection de $\{0, 1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ sur $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a\}$ donc une telle f n'existe pas.

Alors, le nombre de surjection de $\{0,1,\dots,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$ est $\underbrace{n}_{\text{choix de } c} \underbrace{\binom{n+1}{2}}_{\text{choix des deux antécédents de } c} \underbrace{(n-1)!}_{\text{nombre de bijection d'un ensemble de } (n-1) \text{ éléments dans un ensemble de } n-1 \text{ éléments}}.$

- 4) Il n'existe que deux applications de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$ qui ne sont pas des surjections : l'application constante égale à 0 et celle constante égale à 1. Donc le nombre de surjections de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$ est donc égal au nombre total d'applications de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$ auquel on ôte 2 soit $2^n - 2$.

- 5) Construire une application f de $\{1,\dots,10\}$ dans $\{1,10\}$ telles que, si n pair alors $f(n)$ pair, revient à :

1. Construire une application de $\{2,4,6,8,10\}$ sur $\{2,4,6,8,10\}$

1. Construire une application de $\{1,3,5,7,9\}$ sur $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Le nombre d'applications f de $\{1,\dots,10\}$ dans $\{1,10\}$ tq (n pair $\Rightarrow f(n)$ pair) est donc

$$\underbrace{5^5}_{\substack{\text{nbre} \\ \text{d'applications} \\ \text{d'un ensemble de cardinal 5} \\ \text{dans} \\ \text{un ensemble de cardinal 5}}} \times \underbrace{10^5}_{\substack{\text{nbre} \\ \text{d'applications} \\ \text{d'un ensemble de cardinal 5} \\ \text{dans} \\ \text{un ensemble de cardinal 10}}}$$

- 6) $\text{card}(\{1,2,\dots,p\}) = p$ et $\text{card}(\{1,\dots,n\}) = n$.

Donc, si $p > n$ alors il n'existe aucune injection de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$. Désormais supposons que $p \leq n$.

Construire une application f injective de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui admettent 1 dans leur image, revient à

1. Choisir l'unique antécédent a de 1 par f parmi les entiers $1,2,\dots,p$.

2. Construire une injection de $\{1,2,\dots,p\} \setminus \{a\}$ sur $\{2,\dots,n\}$

Le nombre d'applications injectives de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui admettent 1 dans leur image est donc

$$\underbrace{p}_{\substack{\text{nbre d'antécédents} \\ \text{possibles pour 1}}} \times \underbrace{A_{n-1}^{p-1}}_{\substack{\text{nbre} \\ \text{d'applications injectives} \\ \text{d'un ensemble de cardinal } p-1 \\ \text{dans} \\ \text{un ensemble de cardinal } n-1}} \quad (\text{cette formule reste valable si } p > n \text{ puisque dans ce cas } p-1 > n-1 \text{ donc } A_{n-1}^{p-1} = 0)$$

Ex 7 Soit E un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$ contenant a entiers pairs et b entiers impairs. Montrer en utilisant E

que : $\sum_{k=0}^p \binom{a}{k} \binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ où $n \in \mathbb{N}$.

Notons A l'ensemble de parties de E à p éléments.

Comme $\text{card}(E) = a + b$, $\text{card}(A) = \binom{a+b}{p}$.

Comptons d'une autre manière ce nombre de parties de E à p éléments. Notons $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, A_k l'ensemble des parties de E à p éléments contenant k éléments pairs. Alors $(A_0, A_1, \dots, A_p)$ est une partition de A . Donc $\text{card}(A) = \sum_{k=0}^p \text{card}(A_k)$

Construire un élément de A_k revient à

- Choisir les k éléments pairs parmi les a appartenant à E si possible (i.e. si $k \leq a$).
- Choisir les $p - k$ autres éléments qui sont nécessairement impairs et choisir parmi les b appartenant à E si possible (i.e. si $p - k \leq b$).

Donc, $\text{card}(A_k) = \binom{a}{k} \binom{b}{p-k}$ valable si $k > a$ ou $p - k > b$ car dans ce cas $A_k = \emptyset$ donc $\text{card}(A_k) = 0 = \binom{a}{k} \binom{b}{p-k}$.

Ainsi, $\binom{a+b}{p} = \text{card} A = \sum_{k=0}^p \binom{a}{k} \binom{b}{p-k}$.

Ex 8 Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ et $E = \{1, \dots, n\}$ Déterminer :

- le nombre de couple (x, y) d'éléments de E tels que $x + y = n$.
- le nombre de couple (x, y) d'éléments distincts de E .
- le nombre de couple (x, y) d'éléments de E tels que $x > y$.
- le nombre u_n de couple (x, y) d'éléments de E tels que x ou y impair. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}$.
- le nombre de p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_p$.
- le nombre de p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p$.

- 1) $\text{card}\{(1, n-1), (2, n-2), \dots, (n-1, 1)\} = n-1$

- 2) $\text{card}\{(x, y) \in \{1, \dots, n\}^2 / x \neq y\} = A_n^2 = n(n-1)$

- 3) Notons $A_k = \{(k, y) \in \{1, \dots, n\}^2 / k > y\}$ et $A = \{(x, y) \in \{1, \dots, n\}^2 / x > y\}$. Alors $(A_2, A_3, \dots, A_n)$ est une partition de A donc $\text{card}(A) = \sum_{k=1}^n \text{card}(A_k) \stackrel{\text{car } A_k = \{(k, k-1), (k, k-2), \dots, (k, 1)\}}{=} \sum_{k=1}^n (k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

- 4) $u_n = \text{card} B$ où $B = \{(x, y) \in \{1, \dots, n\}^2 / x \text{ ou } y \text{ impair}\}$.

$B = E^2 \setminus \{(x, y) \in \{1, \dots, n\}^2 / x \text{ et } y \text{ pairs}\}$

$$Or, C = \{(x, y) \in \{1, \dots, n\}^2 / x \text{ et } y \text{ pairs}\} = \begin{cases} \{2, 4, 6, \dots, n\} \times \{2, 4, 6, \dots, n\} \text{ si } n \text{ pair} \\ \{2, 4, 6, \dots, n-1\} \times \{2, 4, 6, \dots, n-1\} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}. \text{ Donc } card(C) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \text{ si } n \text{ pair} \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

$$\text{Alors } u_n = card(B) = card(E \times E) - card(C) = \begin{cases} n^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \text{ si } n \text{ pair} \\ n^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{4}n^2 \text{ si } n \text{ pair} \\ \frac{3}{4}n^2 + n - \frac{1}{4} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

$$\text{Donc, } v_n = \frac{u_n}{n^2} = \begin{cases} \frac{3}{4} \text{ si } n \text{ pair} \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = \frac{3}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1}. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{4}.$$

5) Construire un p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_p$, revient à

1. Choisir p éléments distincts parmi les n éléments de E (impossible si $p > n$).
2. Ordonner ces p éléments de manière strictement croissantes pour le ranger dans le p -uplet.

Donc, le nombre de p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ est $\underbrace{\binom{n}{p}}_{\substack{\text{nbre de} \\ \text{façon de prendre} \\ p \text{ éléments parmi } n}} \times \underbrace{1}_{\substack{\text{nbre de façons de les} \\ \text{ordonner}}}$

6) Soit A l'ensemble des p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p$.

Soit B l'ensemble des p -uplets $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ d'éléments de $\llbracket 1, n+p-1 \rrbracket$ tels que $y_1 < y_2 < \dots < y_p$. D'après 5) ; $card(B) = \binom{n+p-1}{p}$.

Construisons une bijection de A sur B :

Si $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont des entiers tels que $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p \leq n$ alors $1 \leq x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 2 < \dots < x_p + p - 1 \leq n + p - 1$.

Soit f définie sur A par : $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2, \dots, x_p + p - 1)$.

Alors, d'après ce qui précède, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in A, f(x_1, x_2, \dots, x_p) \in B$. De plus, f est bijective de A sur B . En effet,

Soit $(y_1, y_2, \dots, y_p) \in B$.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = (y_1, y_2, \dots, y_p) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + 1 \\ y_3 = x_3 + 2 \\ \vdots \\ y_p = x_p + p - 1 \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - 1 \\ x_3 = y_3 - 2 \\ \vdots \\ x_p = y_p - (p - 1) \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p \end{cases}.$$

Comme $y_1, y_2, \dots, y_p$ sont des entiers tels que $1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_p \leq n + (p - 1)$, nous pouvons affirmer que :

$1 \leq y_1 \leq y_2 - 1 \leq y_3 - 2 \leq \dots \leq y_p - (p - 1) \leq n$. Ainsi, $(y_1, y_2 - 1, y_3 - 2, \dots, y_p - (p - 1))$ est l'unique antécédent de $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ par f .

J'en déduis que $card(A) = card(B) = \binom{n+p-1}{p}$.

Ex 9 Soit un ensemble fini E de cardinal n où $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer qu'il y a autant de parties de E de cardinal pair, que de parties de cardinal impair.
- 2) Calculer $\sum_{A \subset E} (-1)^{card(A)}$.
- 3) Dénombrer les couples (X, Y) de $\mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.
- 4) Dénombrer les couples (X, Y) de $\mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = \emptyset$.
- 5) Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $F = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 / X \cap Y = \emptyset \text{ et } card(X \cup Y) = p\}$. En dénombrant F , montrer que

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

- 1) Soit $\Phi = \{X \subset E / card(X) \text{ pair}\}$ et $\Gamma = \{X \subset E / card(X) \text{ impair}\}$. Comme Γ et Φ sont des ss-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(E)$ est fini (de cardinal 2^n), Γ et Φ sont finis.

Soit a un élément de E .

Posons $f: \Phi \rightarrow \Gamma$ telle que $f(X) = \begin{cases} X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases}$ et $g: \Gamma \rightarrow \Phi$ telle que $g(X) = \begin{cases} X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases}$.

Alors $g \circ f = id_\Phi$ et $f \circ g = id_\Gamma$. Donc f est bijective et ainsi, $card(\Gamma) = card(\Phi)$.

De plus, (Γ, Φ) est une partition de $\mathcal{P}(E)$. Donc, $card(\Gamma) + card(\Phi) = card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. Donc $2card(\Gamma) = 2^n$ et ainsi, $card(\Phi) = card(\Gamma) = 2^{n-1}$.

$$2) \sum_{A \subset E} (-1)^{card(A)} = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{card(A)} \stackrel{\substack{\text{car } (\Gamma, \Phi) \text{ est une partition} \\ \text{de } \mathcal{P}(E)}}{=} \sum_{A \in \Phi} (-1)^{card(A)} + \sum_{A \in \Gamma} (-1)^{card(A)}$$

$$= \sum_{A \in \Phi} 1 + \sum_{A \in \Gamma} (-1) = card(\Phi) - card(\Gamma) = 0.$$

- 3) Soit $\Omega = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 / X \subset Y\}$ et $\Omega_k = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 / X \subset Y \text{ et } card(Y) = k\} \subset \Omega$.

Alors $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n)$ est une partition de Ω car

- Si $k \neq k'$ alors $[(X, Y) \in \Omega_k \Rightarrow \text{card} Y = k \Rightarrow \text{card} Y \neq k' \Rightarrow (X, Y) \notin \Omega_{k'}]$ ce qui signifie que $\Omega_k \cap \Omega_{k'} = \emptyset$.
 - $\forall k, \Omega_k \subset \Omega$ donc $\bigcup_{k=0}^n \Omega_k \subset \Omega$ et Si $(X, Y) \in \Omega$ alors Y est fini et en posant $k = \text{card}(Y)$ alors $(X, Y) \in \Omega_k$.
- Ainsi, $\Omega = \bigcup_{k=0}^n \Omega_k$.

Par conséquent, $\text{card}(\Omega) = \sum_{k=0}^n \text{card}(\Omega_k)$. Déterminons $\text{card}(\Omega_k)$:

Construire un élément de Ω_k revient à :

1. Choisir une partie Y de E à k éléments.
2. Choisir un sous-ensemble X de Y .

$$\text{Donc, } \text{card}(\Omega_k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{choix} \\ \text{de } Y \\ = \\ \text{nbre de} \\ \text{parties à } k \\ \text{éléments} \\ \text{dans un ensemble} \\ \text{à } n \text{ éléments}}} \underbrace{2^k}_{\substack{\text{choix de } X \\ = \\ \text{nbre de parties} \\ \text{dans un ensemble} \\ \text{à } k \text{ éléments}}}$$

J'en déduis que $\text{card}(\Omega) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k \stackrel{\text{FBN}}{=} (1+2)^n = 3^n$.

4) Soit $\Omega' = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 / X \cap Y = \emptyset\}$

Soit $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ telle que $f((X, Y)) = (X, \bar{Y})$ et $g: \Omega' \rightarrow \Omega$ telle que $g((X, \bar{Y})) = (X, Y)$. Alors $f \circ g = \text{id}_{\Omega}$ et $g \circ f = \text{id}_{\Omega'}$. Donc f est bijective de Ω sur Ω' et par suite, $\text{card}(\Omega') = \text{card}(\Omega) = 3^n$.

5) Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $F = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 / X \cap Y = \emptyset \text{ et } \text{card}(X \cup Y) = p\}$.

Première méthode pour dénombrer F : Construire un élément de F revient à :

1. Choisir une partie de E à p éléments. $\rightarrow X \cup Y$
2. Choisir dans cette partie un sous-ensemble X (le reste de l'ensemble constituera nécessairement Y)

$$\text{Donc } \text{card}(F) = \underbrace{\binom{n}{p}}_{\substack{\text{choix pour} \\ X \cup Y \\ = \\ \text{nbre de parties} \\ \text{à } p \text{ éléments} \\ \text{dans un ensemble} \\ \text{à } n \text{ éléments}}} \underbrace{2^p}_{\substack{\text{choix pour } X \\ \text{dans } X \cup Y \\ = \\ \text{nbre de parties dans} \\ \text{un ensemble à} \\ p \text{ éléments}}}$$

Deuxième méthode pour dénombrer F : Soit $F_k = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 / X \cap Y = \emptyset \text{ et } \text{card}(X \cup Y) = p \text{ et } \text{card}(X) = k\}$

Alors $(F_k)_{k=0..p}$ est une partition de F . Donc $\text{card} F = \sum_{k=0}^p \text{card}(F_k)$ Dénombrons F_k : Construire un élément de F_k revient à :

3. Choisir une partie de E à k éléments. $\rightarrow X$
4. Choisir une partie de $\bar{X}$ à $p - k$ éléments $\rightarrow Y$.

$$\text{Donc } \text{card}(F_k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nbre} \\ \text{de parties de } E \\ \text{à } k (= \text{card}(X)) \text{ éléments}}} \underbrace{\binom{n-k}{p-k}}_{\substack{\text{nbre de parties} \\ \text{à } p-k \text{ éléments} \\ \text{dans un ensemble} \\ \text{à } n-k (= \text{card} \bar{X}) \text{ éléments}}}$$

Ainsi, $2^p \binom{n}{p} = \text{card} F = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$

Ex 10 Pour tout entier naturel n non nul, on pose D_n le nombre de partitions de l'ensemble $E_n = \{1, \dots, n\}$.

Par convention, $D_0 = 1$.

1) Montrer que : pour tout entier n non nul, $D_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$ puis que $D_n \leq n!$.

2) Soit $f(x) = e^{e^x - 1}$.

- a. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0 de la forme : $f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{k!} x^k + o_0(x^N)$.
- b. En utilisant la relation, $f'(x) = e^x f(x)$ vérifiée par f en tout réel x , montrer que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (D_n) .
- c. En déduire une relation entre a_n et D_n .
- d. Calculer alors D_2, D_3, D_4, D_5 , grâce au DL, puis D_6 grâce à 1).

Ex 11 Pour tout n un entier naturel non nul, on note a_n le nombre de façon qu'à le père Noël de distribuer n cadeaux à n enfants sans qu'aucun enfant ne reçoive le cadeau qu'il a demandé (sachant que dans sa hotte, ce père Noël a exactement les n cadeaux commandés par les n enfants !!).

- 1) Calculer a_1, a_2, a_3 .
- 2) Montrer que : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1})$.
- 3) Montrer que : pour tout entier naturel ≥ 1 , $a_{n+1} - (n+1)a_n = (-1)^{n+1}$.
- 4) Montrer que : pour tout entier naturel ≥ 1 , $\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.
- 5) Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer un équivalent simple de a_n .

