PROGRAMME DE COLLE
Semaine 1

CHAPITRE 0 : Langage mathématiques-Raisonnements-Sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

I. Notation

- Notations et vocabulaire ensemblistes : $\in, \cup, \cap, \subset, \{\dots\}$.
- Quantificateurs : $\forall, \exists, \exists!$
- Proposition et sa négation
- Implication, sa contraposée et sa réciproque.
- Equivalence.

II. Sous -ensemble remarquable de $\mathbb{R}$

- **Définition de** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \boldsymbol{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ **.**
- **Calculs dans** $\mathbb{Z}$ **:** multiple, diviseur, pair, impair, $PPCM$ et $PGCD$.
- **Calculs dans** $\mathbb{Q}$ **:** représentant irréductible, somme, produit et quotient.
- **Calculs dans** $\mathbb{R}$ **:** $\sqrt{2}$ est irrationnel, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnel , le produit d'un irrationnel et d'un rationnel non nul est irrationnel.

III. Raisonnements

- Démonstration par disjonction de cas
- Démonstration par l'absurde
- Démonstration par contraposée
- Démonstration par double implication
- Démonstration par équivalence
- Démonstration par récurrence : Théorème de récurrence Simple – Double – Forte .

CHAPITRE 1 : Sommes et Produits finis-Suites particulières-Systèmes linéaires simples.

I. Sommes et produits finis

- Sommes et produits finies
  - Notation d'une somme finie et d'un produit fini.
  - Propriétés: découpage, séparation, mise en facteur.
  - Changement d'indices.
  - Ecriture de u_n en fonction de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et S_{n-1} OU en fonction de $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ et P_{n-1}.
  - Somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k)$ et plus généralement, $\sum_{k=P}^{N}(u_k - u_{k+1})$. Produit télescopique $\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$.
- Sommes doubles
  - Notation d'une somme double et finie.
  - Théorème d'interversion de deux sommes finies.
  - Produit de deux sommes simples et finies.

II. Formules sommatoires

- Somme
  - des entiers compris entre 1 et n
  - de ces mêmes « entiers au carré »
- Somme géométrique.
  - Factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$
  - Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
  - Formules des sommes géométriques : $\sum_{k=0}^{n} x^k \ \ et \ \ \sum_{k=p}^{n} x^k$.
- Formule du binôme de Newton
  - Définition d'une factorielle, d'un coefficient binomial.
  - Propriétés des factorielles et des coefficients binomiaux. Valeurs particulières.
  - Formule de Pascal. Triangle de pascal.
  - Formule du binôme de Newton.
- Application à quelques suites particulières : expression explicite et sommes des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique, géométrique ou arithmético-géométrique.

III. Systèmes linéaires

- Méthode de résolution d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues par OPERATIONS les lignes.
- Opération élémentaire, système échelonné.
- Méthode de résolution d'un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues et d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus. Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :

1) Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2) Enoncer et démontrer (en utilisant des méthodes différentes) les formules donnant $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
3) Enoncer et démontrer la formule de factorisation de $1-x^n$ par $(1-x)$ et celle des sommes géométriques $\sum_{k=0}^{n} x^k$ et $(\sum_{k=p}^{n} x^k)$.
4) Enoncer et démontrer la formule de Pascal.
5) Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer

1) Enoncé : $\sqrt{2}$ est irrationnel

Imaginons un instant que $\sqrt{2}$ n'est pas irrationnel. Alors $\sqrt{2}$ est rationnel. Donc il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ (représentant irréductible de $\sqrt{2}$) . Alors, $q\sqrt{2}=p$ donc $2q^2 \overset{(**)}{=} p^2$. Par conséquent, p^2 est pair et par suite p *est pair*. Donc il existe un entier m tel que : $p=2m$. Alors $(**)$ s'écrit $2q^2=4m^2$ et par suite $q^2=2m^2$. Par conséquent m est pair tout comme p. 2 est donc un diviseur commun de m *et* p qui ne sont pas donc pas premiers entre eux. Cela contredit la définition de p et q. Ainsi, l'hypothèse « $\sqrt{2}$ est rationnel » aboutissant à une contradiction, cette hypothèse est fausse et j'en conclus que sa négation est vraie i.e. $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel i.e. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2) Enoncé : Soit n un entier naturel. $\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

__Première méthode par récurrence__ : Notons $H(n)$ la propriété " $\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ".

Initialisation : $\frac{0(0+1)}{2}=0=\sum_{k=0}^{0} k$ et $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}=0=\sum_{k=0}^{0} k^2$. Donc, $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose que $H(n)$ est vraie et sous cette hypothèse, je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie i.e. montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ *et* $\sum_{k=0}^{n+1} k^2=\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

$\sum_{k=0}^{n+1} k=(\sum_{k=0}^{n} k)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. OK !!

$\sum_{k=0}^{n+1} k^2=(\sum_{k=0}^{n} k^2)+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$

$\sum_{k=0}^{n+1} k^2=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6n+6}{6}\right)=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)=(n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. OK !!

Ainsi, $(H(n)\Rightarrow H(n+1))$.

Conclusion : le théorème de récurrence simple assure alors que $\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

__Deuxième méthode par télescopage :__

Démo de $\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$:

D'une part, $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{(k+1)^2}_{u_{k+1}}-\underbrace{k^2}_{u_k} \overset{télescopage}{=} u_{n+1}-u_0=(n+1)^2$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2-k^2=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=0}^{n} k+\sum_{k=0}^{n} 1=2\sum_{k=0}^{n} k+(n+1)$.

Par conséquent, $2\sum_{k=0}^{n} k+(n+1)=(n+1)^2$ et par suite, $\sum_{k=0}^{n} k=\frac{1}{2}[(n+1)^2-(n+1)]=\frac{n+1}{2}[n+1-1]=\frac{n(n+1)}{2}$

Démo de $\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

D'une part, $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{(k+1)^3}_{u_{k+1}}-\underbrace{k^3}_{u_k} \overset{télescopage}{=} u_{n+1}-u_0=(n+1)^3$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3=\sum_{k=0}^{n} 3k^2+3k+1=3\sum_{k=0}^{n} k^2+3\sum_{k=0}^{n} k+\sum_{k=0}^{n} 1=3\sum_{k=0}^{n} k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+(n+1)$.

Par conséquent, $3\sum_{k=0}^{n} k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)^3$ et par suite,

$\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{1}{3}\left[(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}\right]=\frac{n+1}{6}[2(n+1)^2-2-3n]=\frac{(n+1)}{6}[2n^2+n]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) Enoncé :

- Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x , $1-x^n=(1-x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)$.
- Pour tout entier naturel n et tout réel x , $\sum_{k=0}^{n} x^k=\begin{cases}\frac{x^{n+1}-1}{x-1} & si\ x\neq 1\\ n+1 & si\ x=1\end{cases}$.
- Pour tous entiers naturels p et n tels que $p\leq n$ et tout réel x , $\sum_{k=p}^{n} x^k=\begin{cases}\frac{x^{n-p+1}-1}{x-1}x^p & si\ x\neq 1\\ n-p+1 & si\ x=1\end{cases}$.

- Soit n entier naturel n non nul et x un réel. $(1-x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)=\sum_{k=0}^{n-1} x^k-x\sum_{k=0}^{n-1} x^k=\sum_{k=0}^{n-1} x^k-\sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}=\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\underbrace{x^k}_{u_k}-\underbrace{x^{k+1}}_{u_{k+1}}\right)}_{\substack{somme\\ télescopioque}}=u_0-u_{(n+1)-1}=x^0-x^n$.

  Ainsi, $\forall N\in\mathbb{N}^*, \forall X\in\mathbb{R}, 1-X^N=(1-X)(\sum_{k=0}^{N-1} X^k)$ $(*)$
- Soit n un entier naturel et x un réel.

  1[er] cas : $x=1$. $\sum_{k=0}^{n} x^k=\sum_{k=0}^{n} 1^k=\sum_{k=0}^{n} 1=n+1$.

  2[ème] cas : $x\neq 1$ alors d'après ce qui précède $(1-x)(\sum_{k=0}^{n} x^k) \underbrace{=}_{\substack{on\ applique\\ (*)\\ avec\\ N=n+1\in\mathbb{N}^*\\ et\ X=x}} 1-x^{n+1}$; *puisque* $x\neq 1, 1-x\neq 0$ *et par suite*, $\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{N} X^k = \begin{cases} \frac{X^{N+1}-1}{X-1} \text{ si } X \neq 1 \\ N+1 \text{ si } X = 1 \end{cases}$ $(**)$.

- Soit p *et* n deux entiers naturels tels que $p \leq n$ et x un réel.
  1[er] cas : $x = 1$. $\sum_{k=p}^{n} x^k = \sum_{k=p}^{n} 1^k = \sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$.
  2[ème] cas : $x \neq 1$. $\sum_{k=p}^{n} x^k = \sum_{k=p}^{n} x^p x^{k-p} = x^p\left(\sum_{k=p}^{n} x^{k-p}\right) = x^p\left(\sum_{j=0}^{n-p} x^j\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{on applique} \\ (**) \\ \text{avec } N=n-p \\ \text{et } X=x\neq1}} x^p \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1}$.

Ainsi, $\forall (N,P) \in \mathbb{N}^2 / P \leq N, \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{k=P}^{N} X^k = \begin{cases} \frac{X^{N-P+1}-1}{X-1} X^P \text{ si } X \neq 1 \\ N-P+1 \text{ si } X = 1 \end{cases}$ $(**)$.

4) Enoncé : Formule de Pascal

Pour tous entiers naturels n et k, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

1[er] cas : $k > n$. Alors $k+1 > n+1 > n$. Donc $\binom{n}{k} = 0 = \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.La formule de Pascal est donc vérifiée si $k > n$.

2[ème] cas : $k = n$. Alors $k+1 = n+1 > n$. Donc $\binom{n}{k} = 1 = \binom{n+1}{k+1}$ *et* $\binom{n+1}{k} = 0$. La formule de Pascal est donc vérifiée si $k = n$.

3[ème] cas : $k < n$. Alors $k \leq n-1$ *donc* $k+1 \leq n < n+1$. Et par suite, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-(k+1))!}$ et $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$. Alors ,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = n!\left[\frac{1}{k!(n-k)!} + \frac{1}{(k+1)!(n-k-1))!}\right] = n!\left[\frac{1}{k!((n-k-1)!)(n-k)} + \frac{1}{(k!)(k+1)(n-k-1))!}\right]$$

$$= n!\left[\frac{k+1}{k!(k+1)((n-k-1)!)(n-k)} + \frac{(n-k)}{(k!)(k+1)((n-k-1))!)(n-k)}\right]$$

$$= n!\left[\frac{k+1}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\right] = n!\left[\frac{k+1+n-k}{(k+1)!(n-k)!}\right] = n!\left[\frac{n+1}{(k+1)!(n-k)!}\right] = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Donc la formule de Pascal est vérifiée si $k < n$.

Ainsi, $\forall (N,K) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{N}{K} + \binom{N}{K+1} = \binom{K+1}{K+1}$.

5) Enoncé : Formule du binôme de Newton

Pour tout entier naturels n et tous réels a et b , $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Soit a et b deux réels. Effectuons une preuve par récurrence sur n. Posons $H(n)$: "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ".

Initialisation : $(a+b)^0 = 1$ *et* $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. Donc $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose que $H(n)$ est vraie et sous cette hypothèse, je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)a + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)b$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

Changement d'indice dans la première somme uniquement : $j = k+1$ *i.e.* $k = j-1$. $k \in [\![0,n]\!] \Leftrightarrow j \in [\![1,n+1]\!]$. Je remplace tous les k et que les k par $j-1$.

$$= \left(\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

J'isole le terme correspondant à « $k = n+1$» dans la première somme.

J'isole le terme correspondant à « $k = 0$» dans la deuxième somme.

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^j b^{n+1-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^j b^{n+1-k}\right) + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^j b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + a^{n+1} b^0 + a^0 b^{n+1}$$

Formule de Pascal

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} [\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}] a^k b^{n+1-k}\right) + 1 a^{n+1} b^0 + 1 a^0 b^{n+1}$$

Car $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \quad \textit{OK !!!}$$

Le théorème de récurrence simple permet alors de conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ *est vraie.*