

Opérations dans \mathbb{R} .

Formules sommatoires. Systèmes linéaires simples.

I. Opérations dans \mathbb{R} (valable dans \mathbb{C}).

1

L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels possède **deux lois internes (opérations)** : une **addition (+)** et une **multiplication (\times)** qui vérifient les propriétés suivantes et qui en font un **corps commutatif**.

- Tous réels $x, y, et z$ vérifient : $(x + y) + z = x + (y + z)$ et $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$. On dit que les deux opérations (+) et (\times) sont **associatives**.
- Tous réels $x et y$, $x + y = y + x$ et $x \times y = y \times x$. Les deux opérations sont dites **commutatives**.
- tout réel x vérifie $x + 0 = x$ (ajouter 0 n'a aucun effet). On dit que 0 est l'**élément neutre** pour (+).
- pour tout réel x $x \times 1 = x$ (multiplier par 1 n'a aucun effet). cela signifie que 1 est l'**élément neutre** pour (\times).
- tout réel x a un symétrique pour l'addition appelé **opposé** de x qui est $-x$ car il vérifie : $x + (-x) = 0$ (ajouter à un réel son opposé donne l'élément neutre 0 de l'addition)

par définition, $a - b = a + (-b)$. On définit ainsi la **soustraction** de réels.

- tout réel x non nul a un symétrique pour la multiplication appelé **inverse** de x qui est x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ car il vérifie $x \times \frac{1}{x} = 1$ (multiplier un réel par son inverse donne l'élément neutre 1 de la multiplication).

par définition, si $b \neq 0$ alors $a \times (\frac{1}{b}) = \frac{a}{b}$. on définit ainsi la **division** de réels.

- Pour tous réels $x, y et z$, $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$. La multiplication est dite **distributive** sur l'addition.
- Pour tous réels $x et y$, $(x \times y = 0 \text{ si et ssi } x = 0 \text{ ou } y = 0)$. On dit alors que la multiplication de \mathbb{R} est **INTÈGRE**. (ou \mathbb{R} est INTÈGRE). Cette propriété est essentielle pour résoudre les équations.

2

Equations : Soient $a, b, et x$ réels (ou complexes).

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \text{on soustrait } a \\ \text{de part et d' autre} \\ \Leftrightarrow \\ a + x = b \\ \Leftrightarrow \\ \text{on ajoute } a \\ \text{de part et d' autre} \end{array} \right) \quad x = b - a \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{l} \text{on multiplie par } 1/a \\ \text{de part et d' autre} \\ \Leftrightarrow \\ ax = b \\ \Leftrightarrow \\ \text{on multiplie par } a \\ \text{de part et d' autre} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b}{a} \text{ si } a \neq 0 \\ x \text{ quelconque si } a = b = 0 \\ \text{impossible si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Soit A et B deux expressions dépendantes de x . $A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$.

3

Règles de calcul sur les fractions : Pour tous réels (ou complexes) $k, a, b, c et d$ éventuellement non nuls,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b} \quad \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a} \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \quad \left(\frac{c}{a}\right) = \frac{c}{a} \times \frac{b}{b} = \frac{cb}{ad}$$

4

ATTENTION : $\frac{a+a}{a+b} \neq \frac{a}{b}$ et $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$.

5

Rappel: Pour additionner deux fractions, on cherche le plus petit dénominateur commun qui n'est pas forcément le produit des deux dénominateurs.

6

Exemples : 1) $\frac{1}{40} - \frac{3}{35} + \frac{2}{56} = \frac{1}{8 \times 5} - \frac{3}{7 \times 5} + \frac{2}{7 \times 8} = \frac{7}{8 \times 5 \times 7} - \frac{3 \times 8}{7 \times 5 \times 8} + \frac{2 \times 5}{7 \times 8 \times 5} = \frac{7-24+10}{8 \times 5 \times 7} = \frac{-7}{8 \times 5 \times 7} = -\frac{1}{40}$

2) $\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a^2-ab} + \frac{1}{ab+b^2} = \frac{1}{(a-b)(a+b)} - \frac{1}{a(a-b)} + \frac{1}{b(a+b)} = \frac{ab}{ab(a-b)(a+b)} - \frac{b(a+b)}{a(a-b)b(a+b)} + \frac{a(a-b)}{b(a+b)a(a-b)} = \frac{ab+b(a+b)+a(a-b)}{b(a+b)a(a-b)} = \frac{ab+b^2+a^2}{b(a+b)a(a-b)}$

7

Définition: pour tout réel (ou complexe) x et tout entier naturel p non nul, $x^0 = 1$ et $x^p = x \times x \times \dots \times x = x^{p-1} \times x$.
Pour tout réel (ou complexe) x non nul et tout entier naturel p , $x^{-p} \equiv \frac{1}{x^p} = \left(\frac{1}{x}\right)^p$.

Pour tout **réel** a positif, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, la racine n ème du réel positif a , est l'**unique réel positif** dont la puissance n vaut a . (pour $n = 2, \sqrt{a}$ est la racine carrée de a).

Pour tout **réel** a positif, pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ tels que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (a^{\frac{1}{q}})^p$.

Non valable dans \mathbb{C}

8

NB : $\forall k \in \mathbb{Z}, (-1)^{2k} = 1$ et $(-1)^{2k+1} = -1$ et $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$.

9

Règles de calcul sur les puissances entières : Pour tous rationnels p et q , pour tous réels (ou complexes si p et q sont entiers) $x et y$ éventuellement non nuls, $x^p x^q = x^{p+q}$ $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ $(x^p)^q = x^{pq}$ $x^p y^p = (xy)^p$ $\frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p$.

En particulier, si $x et y$ sont réels, alors $\sqrt{x} \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ et si y est non nul alors $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

10

Exemples : $\sqrt{\frac{(-2)^{2k+4} \times 3^{k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}} = \left(\frac{(-1)^{2k+4} \times 2^{2k+4} \times 3^{k-1}}{2^{2k} \times 3^{-k+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^{2k+4-2k} \times 3^{k-1+k-1})^{\frac{1}{2}} = (2^4 \times 3^{2k-2})^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}} \times (3^{2k-2})^{\frac{1}{2}} = 2^2 \times 3^{k-1}$.

M

Identités remarquables et plus : Pour tous réels (ou complexes) a et b et c ,
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (*) et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (***) et $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (**) et $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

↳ **Démo :** il suffit de développer la forme factorisée pour obtenir la forme développée.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) \stackrel{(\times)\text{distributive sur } (+)}{=} (a + b)a + (a + b)b \stackrel{(\times)\text{distributive sur } (+)}{=} (a^2 + ba) + (ab + b^2) \stackrel{(+)\text{associative et } (\times)\text{commutative}}{=} a^2 + 2ab + b^2 (*)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 - b^2 \text{ et } (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 (**)$$

$$(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 \stackrel{\text{méthode à retenir}}{=} \stackrel{\text{on applique } (*) \text{ à } (a+b) \text{ et } c}{=} (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \stackrel{(\times)\text{distributive sur } (+) \text{ et formule précédente}}{=} (a^2 + 2ab + b^2) + (2ac + 2bc) + c^2$$

$$\text{Ainsi, } (a + b + c)^2 \stackrel{(+)\text{associative et commutative}}{=} a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$\text{De même, } (a - b)^2 = (a + (-b))^2 \stackrel{\text{méthode à retenir}}{=} \stackrel{\text{on applique } (*) \text{ à } a \text{ et } -b}{=} a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\text{Ensuite, } (a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \dots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 (***)$$

$$\text{Alors, } (a - b)^3 = (a + (-b))^3 \stackrel{\text{on applique } (***) \text{ à } a \text{ et } -b}{=} a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$\text{Enfin, } a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3 \stackrel{\text{on applique } (***) \text{ à } a \text{ et } -b}{=} (a - (-b))(a^2 + a(-b) + (-b)^2) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

II. Généralisation (valable dans \mathbb{C}).

1. Notation \sum et \prod .

12

Généralisation : Pour tous réels (ou complexes) u_k , $\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ et $\prod_{k=1}^n u_k = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.

- $\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k \in \llbracket p, n \rrbracket} u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n$ et $\prod_{k=p}^n u_k = \prod_{k \in \llbracket p, n \rrbracket} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \dots \times u_n$
- $\sum_{\substack{k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \\ k \text{ pair}}} u_k = \sum_{j=0}^n u_{2j} = u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2n-2} + u_{2n}$ et $\prod_{\substack{k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \\ k \text{ pair}}} u_k = \prod_{j=0}^n u_{2j} = u_0 \times u_2 \times \dots \times u_{2n}$
- $\sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket \\ k \text{ impair}}} u_k = \sum_{j=0}^n u_{2j+1} = u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} + u_{2n+1}$ et $\prod_{\substack{k \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket \\ k \text{ impair}}} u_k = \prod_{j=0}^n u_{2j+1} = u_1 \times u_3 \times \dots \times u_{2n+1}$

13

Exemples importants : $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$ et $\sum_{k=1}^n \lambda = n\lambda$ et $\sum_{k=1}^n 1 = n$ et $\prod_{k=1}^n \lambda = \lambda^n$.

14

NB : $\sum_{k=p}^m 1 = m - p + 1$ = nombre de termes d'une somme allant de p à m .

15

Exercice Calculons $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k$.

$$\text{Si } n \text{ est pair alors } S_n = \underbrace{-1+2}_{=1} + \underbrace{-3+4}_{=1} + \underbrace{-5+6}_{=1} + \dots + \underbrace{-(n-1)+n}_{=1} = \underbrace{1+1+\dots+1}_{\frac{n}{2} \text{ termes}} = \frac{n}{2}$$

$$\text{Si } n \text{ est impair alors } S_n = \underbrace{-1+2}_{=1} + \underbrace{-3+4}_{=1} + \underbrace{-5+6}_{=1} + \dots + \underbrace{-(n-2)+(n-1)}_{=1} - n = \underbrace{1+1+\dots+1}_{\frac{n-1}{2} \text{ termes}} - n = \frac{n-1}{2} - n = -\frac{n+1}{2}$$

$$\text{Vérification : } S_3 = -1 + 2 - 3 = -2 = -\frac{3+1}{2} \text{ OK ; } S_6 = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 = 3 = \frac{6}{2} \text{ OK.}$$

16

Propriétés Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \in \{1, \dots, n\}$ et tous réels (ou complexes) u_k et v_k ,

- 1) $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{p-1} u_k + \sum_{k=p}^n u_k$ et $\prod_{k=0}^n u_k = \prod_{k=0}^{p-1} u_k \times \prod_{k=p}^n u_k$
- 2) Pour tous réels α et β indépendants de n , $\sum_{k=0}^n (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha (\sum_{k=0}^n u_k) + \beta (\sum_{k=0}^n v_k)$ et
- 3) $\prod_{k=0}^n u_k v_k = \prod_{k=0}^n u_k \times \prod_{k=0}^n v_k$ (en particulier, $\prod_{k=0}^n \alpha u_k = \alpha^{n+1} \prod_{k=0}^n u_k$) et si, de plus, tous les v_k sont non nuls

$$\text{alors } \prod_{k=0}^n \frac{u_k}{v_k} = \frac{\prod_{k=0}^n u_k}{\prod_{k=0}^n v_k}.$$

$$4) \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \text{ pair}}} u_k + \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \text{ impair}}} u_k \text{ et } \prod_{k=0}^n u_k = \prod_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \equiv 0[3]}} u_k \times \prod_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \equiv 1[3]}} u_k \times \prod_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \equiv 2[3]}} u_k (\dots)$$

17

Théorème :

➤ Si pour tout n , $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ alors $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n > 0$. ↳ **Démo**

➤ Si pour tout entier n , $u_n \neq 0$ et $P_n = \prod_{k=0}^n u_k$, alors pour tout entier n non nul, $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$. ↳ **Démo**

18

Conséquence : si je connais une expression de S_n ou P_n alors je peux trouver une expression de u_n .

2. Changements d'indice ou réécriture.

19 Exemples : $\sum_{k=0}^n u_k \stackrel{k=n-l \text{ i.e. } l=n-k}{\cong} \sum_{l=0}^n u_{n-l} \quad \sum_{l=0}^n u_{n-l} \stackrel{k=p-1 \text{ i.e. } p=k+1}{\cong} \sum_{p=1}^{n+1} u_{p-1}$ et $\prod_{k=2}^n u_k \stackrel{i=k-2}{\cong} \prod_{i=0}^{n-2} u_{i+2}$
 $\llbracket 0, n \rrbracket = \{n-l / l \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ $\llbracket 0, n \rrbracket = \{p-1 / p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket\}$ $\llbracket 2, n \rrbracket = \{i+2 / p \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket\}$

20 Exemples : 1) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k}$
 2) $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^k$
 3) D'une part, $\sum_{k=1}^n (k^2 + k + 1) = \sum_{k=1}^n (k(k+1) + 1) = \sum_{k=2}^{n+1} ((k-1)k + 1) = \sum_{k=2}^{n+1} (k^2 - k + 1)$.
 D'autre part, $\sum_{k=1}^n (k^2 + k + 1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$.

21 Exercice : Calculons $D_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k})$. $D_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k}{\prod_{k=1}^n k} = n + 1$.

3. Télésopage

22 Somme télescopique : $\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$
 Produit télescopique : $\prod_{k=p}^n \frac{w_k}{w_{k+1}} = \frac{w_p}{w_{n+1}}$
 En conséquence : $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$. \leftrightarrow Démo

23 Exemples : 1. $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \stackrel{\cong}{=} \sum_{k=1}^n (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right] = 1 - \frac{1}{n+1}$.
à détailler si je ne vois pas tout de suite la somme télescopique

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ Calculons $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3-1}{k^3+1}$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.
 $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \prod_{k=2}^n (k^2+k+1)}{\prod_{k=2}^n (k+1) \prod_{k=2}^n (k^2-k+1)} \stackrel{\cong}{=} \frac{\prod_{k=3}^{n+1} k \prod_{k=2}^n u_{k+1}}{\prod_{k=3}^{n+1} k \prod_{k=2}^n u_k} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{u_{n+1}}{3} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)+1}{3} = \frac{2n^2+n+1}{3n^2+n}$
 $P_n = \frac{1}{3} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{2}{3}$.

Deux exercices corrigés classiques :

1. Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; 2\}$, $\frac{1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$. En déduire $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k+1)(k-2)}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

\rightarrow Tout d'abord, $\frac{a(x+1)(x-2)}{x(x+1)(x-2)} + \frac{bx(x-2)}{x(x+1)(x-2)} + \frac{cx(x+1)}{(x-2)x(x+1)} = \frac{(a+b+c)x^2 + (-a-2b+c)x - 2a}{x(x+1)(x-2)}$

Donc pour de tels réels a, b et c existent, il faut que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; 2\}$, $1 = (a+b+c)x^2 + (-a-2b+c)x - 2a$. Donc il suffit que a, b , et c vérifient :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a-2b+c=0 \\ -2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} (L_1) \\ -2b+c = -\frac{1}{2} (L_2) \\ b+c = \frac{1}{2} (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} (L_1) \\ -3b = -1 (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\ 3c = \frac{1}{2} (L_3) (L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2) \end{cases} \text{ . Ainsi, } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$\rightarrow S_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k+1)(k-2)} = \sum_{k=3}^n \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{k} + \frac{1}{3} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{6} \frac{1}{k-2} \right)$

$S_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{3} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{6} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-2} \stackrel{\text{réécriture}}{\cong} -\frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{3} \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}$
 $S_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \sum_{k=4}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{k=4}^{n-2} \frac{1}{k} \right)$

$S_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) \left(\sum_{k=4}^{n-2} \frac{1}{k} \right) + \frac{5}{36} - \frac{1}{6(n-1)} - \frac{1}{6n} + \frac{1}{3(n+1)} = \frac{5}{36} - \frac{1}{6(n-1)} - \frac{1}{6n} + \frac{1}{3(n+1)}$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{5}{36}$.

2. Supposons qu'il existe a et b réels tels que $b-1-a \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

Montrons que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{a+1-b} [(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0]$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+a}{k+b}$ donc, $(k+b)u_{k+1} - (k+a)u_k = 0$ et par conséquent $\sum_{k=1}^n [(k+b)u_{k+1} - (k+a)u_k] = 0$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^n [(k+b)u_{k+1} - (k+a)u_k] = \sum_{k=0}^n [(k+b)u_{k+1} - \underbrace{(k+b-1)u_k}_{v_k} + (b-1-a)u_k]$

$= \left[\sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) \right] + [(b-1-a) \sum_{k=0}^n u_k] \stackrel{\text{télésopage}}{\cong} v_{n+1} - v_0 + (b-1-a)S_n$
 $= (n+b)u_{n+1} + (b-1)u_0 + (b-1-a)S_n$.

Par conséquent, $(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0 + (b-1-a)S_n = 0$. Ainsi, comme $b-1-a \neq 0$, $S_n = \frac{1}{a+1-b} [(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0]$.

4. Somme double et finie

Définition : Soit n et p des entiers naturels. Soit $n \times p$ nombres réels (ou complexes) notés a_{ij} tels que $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$. La somme de tous les réels a_{ij} est la **somme double** notée :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij}$$

$\sum_{\substack{r \leq i \leq s \\ m \leq j \leq q}} a_{ij}$ désigne la somme de tous les réels a_{ij} tels que $\begin{cases} r \leq i \leq s \\ m \leq j \leq q \end{cases}$.

Théorème d'inversion de deux SOMMES FINIES :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right)$$

De même, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j a_{ij} \right)$ \rightarrow Démo par illustration

Illustration :

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	$j = 1$	$j = 2$...	j	...	$j = p$	Somme des complexes de chaque ligne
$i = 1$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1p}	$\sum_{j=1}^p a_{1j}$
$i = 2$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2p}	$\sum_{j=1}^p a_{2j}$
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	...	\vdots	\vdots
i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{ip}	$\sum_{j=1}^p a_{ij}$
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	...	\vdots	\vdots
$i = n$	a_{n1}	a_{n3}	...	a_{nj}	...	a_{np}	$\sum_{j=1}^p a_{nj}$
Somme des complexes de chaque colonne	$\sum_{i=1}^n a_{i1}$	$\sum_{i=1}^n a_{i2}$...	$\sum_{i=1}^n a_{ij}$...	$\sum_{i=1}^n a_{ip}$	la somme de tous les complexes a_{ij} vaut : $\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^p a_{ij}) = \sum_{j=1}^p (\sum_{i=1}^n a_{ij})$

Théorème sur le produit de deux sommes finies : $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p$ des nombres réels (ou complexes). Alors

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^p b_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_i b_j \quad \rightarrow \text{Démo}$$

Exemples : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} 1 = \sum_{1 \leq i \leq p} 1 \times \sum_{1 \leq j \leq q} 1 = (\sum_{1 \leq i \leq p} 1) (\sum_{1 \leq j \leq q} 1) = pq$.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} j 2^i = (\sum_{1 \leq i \leq p} i) (\sum_{1 \leq j \leq q} 2^j) = p \frac{2^{q+1} - 1}{2 - 1} = p(2^{q+1} - 1).$$

III. Formules sommatoires

1. Sommes des n premiers entiers à différentes puissances

30

Théorème de calcul des sommes des n premiers entiers à différentes puissances :

Pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \hookrightarrow \text{Démonstration}$$

31

Exemples :

1) Calculons la somme des entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2\left(\sum_{k=0}^n k\right) + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2$$

2) Calculons $S(n) = \sum_{\substack{3 \leq i \leq 2n+1 \\ 2 \leq j \leq 2n}} ij$ où n entier naturel supérieur à 3.

$$S(n) = \sum_{\substack{3 \leq i \leq 2n+1 \\ 2 \leq j \leq 2n}} ij = \sum_{\substack{3 \leq i \leq 2n+1 \\ 2 \leq j \leq 2n}} i \times j \quad \begin{array}{l} \text{théo} \\ \text{produit de} \\ \text{deux sommes} \end{array} \left(\sum_{i=3}^{2n+1} i\right) \left(\sum_{j=2}^{2n} j\right) \quad \begin{array}{l} \text{je fais apparaître} \\ \text{deux sommes de la forme} \\ \sum_{k=1}^N k \\ \text{et je compense} \end{array} \left[\left(\sum_{i=1}^{2n+1} i\right) - 1 - 2\right] \left[\left(\sum_{j=1}^{2n} j\right) - 1\right]$$

$$S(n) \stackrel{\text{j'applique la formule}}{=} \left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2} - 3\right) \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - 1\right)$$

2) Calculons $T(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$

$$T(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i/j = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} i \times \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{j} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \frac{1}{j} \cdot \frac{(j-1)j}{2} = \frac{(j-1)}{2}$$

$$\text{Donc, } T(n) = \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^n j - \sum_{j=2}^n 1\right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j - 1 - \sum_{j=1}^n 1 + 1\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{n(n-1)}{4}$$

2. Sommes géométriques

32

Théorème de factorisation de $1 - z^n$.

Pour tout réel (ou complexe) z , pour tout entier naturel non nul n , $1 - z^n = (1 - z) \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right)$. \hookrightarrow Démonstration

33

Autre version : pour tout réel z , pour tout entier naturel n , $1 - z^{n+1} = (1 - z) \left(\sum_{k=0}^n z^k\right)$.

34

Théorème de somme géométrique. Soit z un réel (ou complexe) et n un entier naturel.

$$\sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} & \text{si } z \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Et plus généralement, $\forall z \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$\sum_{k=p}^n z^k = z^p \sum_{k=0}^{n-p} z^k = \begin{cases} z^p \left(\frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}\right) & \text{si } z \neq 1 \\ n - p + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Autrement dit, si } z \neq 1 \text{ alors } \sum_{k=p}^n z^k = \text{premier terme} \times \left(\frac{1 - z^{\text{nombre de termes}}}{1 - z}\right) \quad \hookrightarrow \text{Démonstration}$$

35

Exemples : 1) Calculons $S = \sum_{k=2}^{n+2} (nk + 2^{k+1} - 1)$

$$S = \sum_{k=2}^{n+2} (nk + 2^{k+1} - 1) = \left(n \sum_{k=2}^{n+2} k\right) + 2 \left(\sum_{k=2}^{n+2} 2^k\right) - \left(\sum_{k=2}^{n+2} 1\right)$$

$$S = \left(n \sum_{k=1}^{n+2} k - n\right) + 2 \left(\sum_{k=0}^{n+2} 2^k - 1 - 2\right) - \left(\sum_{k=2}^{n+2} 1\right)$$

$$S = n \cdot \frac{(n+2)(n+3)}{2} - n + 2 \cdot \frac{1-2^{n+3}}{1-2} - 6 - (n+2-2+1) = n \cdot \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 2n + 2^{n+4} - 9$$

2) Calculons $S = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j}$

$$S = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^n 2^i \left(\sum_{j=i}^n 2^j\right) = \sum_{i=0}^n 2^i \left(\sum_{j=0}^n 2^j - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j\right) = \sum_{i=0}^n 2^i \left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1} - \frac{2^i-1}{2-1}\right)$$

$$S = \sum_{i=0}^n 2^i (2^{n+1} - 2^i) = \sum_{i=0}^n 2^i (2^{n+1} - 2^i) = 2^{n+1} \left(\sum_{i=0}^n 2^i\right) - \left(\sum_{i=0}^n 4^i\right)$$

$$S = 2^{n+1} \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - \frac{4^{n+1}-1}{4-1} = 2^{2(n+1)} - 2^{n+1} - \frac{4}{3} \cdot 4^n + \frac{1}{3} = \left(4 - \frac{4}{3}\right) \cdot 4^n - 2^{n+1} + \frac{1}{3} = \left(\frac{8}{3}\right) \cdot 4^n - 2 \cdot 2^n + \frac{1}{3}$$

36

Théorème de factorisation de $a^n - b^n$. Soit a et b deux réels (ou complexe) et n un entier naturel non nul.

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

$$a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

↪ Démo

37

Cas particuliers importants

- En prenant $n = 2$ ou 3 , on retrouve : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
- En prenant $a = 1$ et $b = z$, on retrouve la factorisation de $1 - z^n$.

3. Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

38

Définition d'une factorielle et d'un coefficient binomial: Soit k et n deux entiers naturels.

- Factorielle n est l'entier naturel noté $n!$ défini par : $0! = 1$ si $n = 0$

$$\text{et si } n \geq 1 \text{ alors } n! = 1 \times 2 \times \dots \times n = n \times (n-1) \times \dots \times 1 = \prod_{k=1}^n k = n \times (n-1)! =$$

= produit de tous les entiers compris entre 1 et n .

- Le coefficient binomial k parmi n est noté $\binom{n}{k}$ et défini par : $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$.

39

NB: 1) $(2n)! \neq 2(n!)$

2) si $n \geq k$ alors $\frac{n!}{(n-1)!} = n$, $\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$ et plus généralement, $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$

3) $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

40

Exercice corrigé classique: Ecrire les expressions $A = \prod_{k=1}^n (2k)$ et $B = \prod_{k=1}^n (2k+1)$ et $\frac{A}{B}$ avec des factorielles et coeff. binomiaux

$$A = 2 \times 4 \times \dots \times (2n) \stackrel{\text{je mets 2 en facteur sur chaque terme pair}}{=} (2 \times 1) \times (2 \times 2) \dots (2 \times n) \text{ ou bien } A = \prod_{k=1}^n (2k) = 2^n (\prod_{k=1}^n k) = 2^n n!$$

$$A \stackrel{\text{je regroupe tous les facteurs 2}}{=} 2^n (1 \times 2 \times \dots \times n) = 2^n n!$$

$$B = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \stackrel{\text{je fais apparaître les entiers manquants pour avoir une factorielle et je compense}}{=} \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2n) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \stackrel{\text{je reconnais A au dénominateur et j'applique la technique précédente}}{=} \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$\frac{A}{B} = 2^n n! \times \frac{2^n n!}{(2n+1)!} = 2^{2n} \frac{n! n!}{(2n+1)(2n)!} \stackrel{\text{car } \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}}{=} \frac{4^n}{(2n+1) \binom{2n}{n}}$$

41

Propriétés: Si k et n sont deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. ↪ Démo.

42

Valeurs particulières: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ si $n \geq 1$ et enfin $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ si $n \geq 2$.

43

Formule de Pascal: Pour tous k et n entiers naturels, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. ↪ Démo

44

Exercice corrigé classique: Calculons $W_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{n}$.

$$W_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} \stackrel{\text{triangle de Pascal}}{=} \sum_{k=n}^{2n} \left[\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \right] = u_{2n+1} - u_n = \binom{2n+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$$

somme télescopique

45

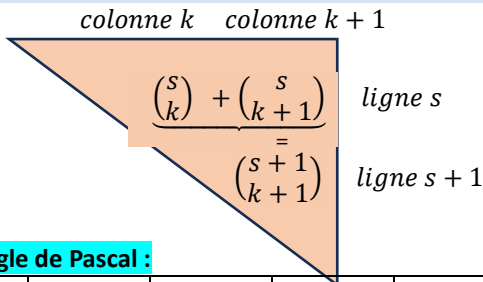
Conséquence: Pour tous k et n entiers naturels, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel (≥ 1 dès que $n \geq k \geq 0$) ↪ Démo

46

Méthode de triangle de Pascal pour calculer les coefficients binomiaux : Considérons un tableau $n + 1$ lignes, $n + 1$ colonnes . On numérote les lignes et colonnes de 0 à n . Nous allons remplir ce tableau avec les coefficients binomiaux $\binom{s}{k}$ pour s et k entre 0 et n de la manière suivante : **en ligne s et colonne k va se trouver le coefficient binomial k parmi s : $\binom{s}{k}$.**

Tout d'abord, je remplis la ligne 0 et la colonne 0 facilement puisque $\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\binom{s}{0} = 1$ pour tout s .

Je remplis ensuite les autres cases en utilisant la formule de Pascal :



Triangle de Pascal :

k \ s	colonne k = 0	colonne k = 1	colonne k = 2	colonne k = 3	...	colonne k = j	colonne k = j + 1	...	colonne k = n - 2	colonne k = n - 1	colonne k = n
ligne s = 0	$\binom{0}{0}=1$	$\binom{0}{1}=0$	$\binom{0}{2}=0$	0	...	0	0	...	0	0	0
s = 1	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$	$\binom{1}{2}=0$	0	...	0	0	...	0	0	0
s = 2	1	2	1	0	...	0	0	...	0	0	0
s = 3	1	3	3	1	...	0	0	...	0	0	0
s = 4	1	4	6	4	0	0	0	...	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
s = n - 1	1	n - 1	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$	$\binom{n-1}{j}$	$\binom{n-1}{j+1}$...	n - 1	1	0
s = n	1	n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\binom{n}{j}$	$\binom{n}{j+1}$...	$\frac{n(n-1)}{2}$	n	1

47

Théorème : Formule du binôme de Newton (FBN) . Soit a et b deux nombres réels (ou complexes) et n un entier naturel .

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} b^{n-1} a + \binom{n}{2} b^{n-2} a^2 + \dots + \binom{n}{n-1} b a^{n-1} + \binom{n}{n} a^n. \quad \hookrightarrow \text{Démonstration}$$

48

NB :

- 1) Les coefficients $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ sont rangés dans le tableau de Pascal à la ligne $s = n$.
- 2) On retrouve les développements suivants : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (avec $n = 2$) et de : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (avec $n = 3$).

Tableau de Pascal :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

49

Corollaire : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n. \quad \hookrightarrow \text{Démonstration}$

NB : ne pas confondre avec : $W_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{n}$ et S_n .

50

Exemples classiques :

1) Développons :

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a - b)^7 = 1a^7 + 7a^6(-b) + 21a^5(-b)^2 + 35a^4(-b)^3 + 35a^3(-b)^4 + 21a^2(-b)^5 + 7a(-b)^6 + 1(-b)^7$$

$$(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7.$$

2) Calculons $T_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}$. $T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = (1 - 1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $X_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $Y_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.

51 Alors $X_n + Y_n = S_n$ et $X_n - Y_n = T_n$. Autrement dit, $\begin{cases} X_n + Y_n = 2^n \\ X_n - Y_n = 0 \end{cases}$ Donc, $X_n = \frac{2^n+0}{2}$ et $Y_n = \frac{2^n-0}{2}$. Ainsi, $X_n = Y_n = 2^{n-1}$.

Exercices corrigés: 1) Calculons $H_n = \sum_{k=0}^n 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$.

$$H_n \underset{FBN}{=} \sum_{k=0}^n \underbrace{(k+1)^5}_{u_{k+1}} - \underbrace{k^5}_{u_k} \underset{\text{télescope}}{=} (n+1)^5 - 0^5 = (n+1)^5.$$

2) Calculons $R_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k+1} 3^{k-1}$.

$$R_n = \sum_{k'=2}^{n-2} \binom{n-1}{k'} 3^{k'-2} = \frac{1}{9} \left(\sum_{k'=2}^{n-2} \binom{n-1}{k'} 3^{k'} \right) = \frac{1}{9} \left(\sum_{k'=2}^{n-2} \binom{n-1}{k'} 3^{k'} 1^{n-1-k'} \right)$$

$$R_n = \frac{1}{9} \left[\left(\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} 3^{k'} 1^{n-1-k'} \right) - \left(\binom{n-1}{0} 3^0 + \binom{n-1}{1} 3^1 + \binom{n-1}{n-1} 3^{n-1} \right) \right] = \frac{1}{9} ((1+3)^{n-1} - (1 + (n-1)3 + 3^{n-1}))$$

Ainsi, $R_n = \frac{1}{9} (4^{n-1} - 3^{n-1} - 3n + 2)$.

4. Application à quelques suites récurrentes particulières

52 **Définition d'une suite** : Une suite réelle (resp. complexe) est une relation qui associe un réel (resp. un complexe) à chaque entier naturel (ou parfois seulement à partir d'un certain rang n_0). Si u est une suite alors on note u_n le réel (resp. complexe) associé à l'entier naturel n par la suite u et u est aussi notée (u_n) ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Remarque : une suite réelle (resp. complexe) peut être assimilée à une famille de réels (complexes) rangée.

53 **Définition d'une suite arithmétique** : (u_n) est une suite arithmétique lorsqu'il existe un réel (ou complexe) b tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + b$. b est appelée la raison de la suite (u_n) .

54 **Propriété d'une suite arithmétique** : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison b alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb$ et

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}b.$$

55 **Définition d'une suite géométrique** : (u_n) est une suite géométrique lorsqu'il existe un réel ou complexe a tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$. a est appelé la raison de la suite (u_n) .

56 **Propriété d'une suite géométrique** Si (u_n) est une suite géométrique de raison a alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 a^n$ et

$$\sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u_0 & \text{si } a \neq 1 \\ (n+1)u_0 & \text{si } a = 1 \end{cases} \text{ et } \sum_{k=p}^n u_k = \begin{cases} \frac{1-a^{n-p+1}}{1-a} u_0 & \text{si } a \neq 1 \\ (n-p+1)u_0 & \text{si } a = 1 \end{cases} \text{ où } p \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

57 **Rappel** : Soit a un réel.

➤ si $a = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 1$

➤ si $a > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$

➤ si $-1 < a < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

➤ si $a < -1$ alors $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite quand $n \rightarrow +\infty$

58 **Définition d'une suite arithmético-géométrique** (u_n) est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux réels (ou complexes) a et b tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

59 **Méthode pour obtenir une expression d'une suite arithmético-géométrique** :

1. On cherche alors LE réel L tel que : $L = aL + b$

2. On montre que la suite $(u_n - L)$ est géométrique de raison a .

3. On peut alors écrire que : $u_n - L = a^n(u_0 - L)$ et donc $u_n = L + a^n(u_0 - L)$.

60 **Exemple** : Soit u la suite définie par : $u_0 = (-1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+1} - 3u_n = 5$. Exprimons u_n en fonction de n puis calculons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Je constate que u est arithmético-géométrique ($a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{5}{2}$). Je cherche alors le réel L tel que : $L = \frac{3}{2}L + \frac{5}{2}$ ie. $L = -5$. Je pose alors pour tout n , $v_n = u_n - (-5)$.

On a donc, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2}$ et $L = \frac{3}{2}L + \frac{5}{2}$. Donc, $u_{n+1} - L = \left(\frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}L + \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}(u_n - L)$. Autrement dit, $v_{n+1} =$

$\frac{3}{2}v_n$. Donc la suite v est géométrique et ainsi, pour tout n , $v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n v_0$ ie. $u_n + 5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n (u_0 + 5)$.

J'en conclus que pour tout n , $u_n = -5 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Alors, $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left(-5 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^k\right) = -5(n+1) + 4\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$. Ainsi, $S_n = -9 - 5n + 12\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

IV. Systèmes linéaires

1. Exemples et définitions

- $S_0: \{x + y + 3z = 0\}$ est un système linéaire de 1 équation à 3 inconnues x, y et z .
 $S_{obis}: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.
 $S_1: \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 2x - y + t = 0 \\ x + 2t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$ est un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues.
 $S_5: \begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ 10x - 2y + 4t = 0 \\ 5x - y + 2t = -1 \end{cases}$ est un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues.
 $S_{11}: \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m \end{cases}$ de paramètre $m \in \mathbb{R}$ est un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues x, y et z et à un paramètre m .

Définitions :

- RESOUDRE (S_0), c'est trouver tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation, ces triplets sont les solutions de (S_0)
- RESOUDRE (S_5), c'est trouver tous les quadruplets $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant les 3 équations, ces quadruplets sont les solutions de (S_5).
- Un système est dit compatible lorsqu'il admet au moins une solution.
- Un système de n équations à n inconnues admettant une unique solution est dit de Cramer.
- Deux systèmes linéaires sont équivalents lorsqu'ils ont exactement les mêmes solutions. On note $(S) \Leftrightarrow (S')$.

NB : 1) $(S): \begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy - e^y = 2 \end{cases}$ est un système NON linéaire de 2 équations à 2 inconnues. On ne donnera pas de méthode systématique pour résoudre un tel système sauf dans le cas d'un système de la forme $\begin{cases} x - y = s \\ xy = p \end{cases}$ (Cf chapitre suivant).

2) $(S): \begin{cases} \ln(x) - 2\ln(y^2) = 1 \\ \ln\left(\frac{x}{3y}\right) = 2 \end{cases}$ est un système NON linéaire de 2 équations à 2 inconnues qui peut être ramené à un système linéaire en posant $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$. En effet, (S) s'écrit alors (S'): $\begin{cases} X - 4Y = 1 \\ X - Y = 2 + \ln(3) \end{cases}$.

2. Opérations élémentaires

Définition : Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont :

Op 1 : échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$

Op 2 : multiplier une ligne par un scalaire non nul $L_i \leftarrow \mu L_i$ tq $\mu \in K^*$

Op 3 : ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un scalaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ tq $\alpha \in K$ et $i \neq j$.

Opérations élémentaires	Opérations élémentaires inverses
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_j \leftrightarrow L_i$
$L_i \leftarrow \mu L_i$ tq $\mu \in K^*$	$L_i \leftarrow \frac{1}{\mu} L_i$ tq $\mu \in K^*$
$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ tq $\alpha \in K$ et $i \neq j$	$L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$ tq $\alpha \in K$ et $i \neq j$

Ces opérations étant réversibles, si l'on passe de S à S' en effectuant l'une des opérations précédentes alors on sait passer de (S') à (S) en effectuant l'opération inverse et par suite, vérifier (S), c'est vérifier (S') ; par conséquent, (S') et (S) ont les mêmes solutions. On a alors $(S) \Leftrightarrow (S')$.

ATTENTION : si l'on fait plusieurs opérations élémentaires en même temps pour passer de (S) à (S'), il faut s'assurer que (S') et (S) sont bien équivalents i.e. ont les mêmes solutions. Il ne faut pas perdre ou rajouter de solutions.

Reprenons un des exemples précédents. Lorsque je fais $\begin{cases} L_1 \leftarrow 4L_1 - 3L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_1 + 5L_2 \end{cases}$, je fais beaucoup d'opérations élémentaires simultanément : $L_1 \leftarrow 4L_1 - 3L_2$ se décompose en deux opérations $L_1 \leftarrow 4L_1$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$ idem pour $L_2 \leftarrow 3L_1 + 5L_2$. Donc, je me suis assuré de pouvoir passer de (S') à (S) en effectuant $\begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{29}(5L_1 + 3L_2) \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{29}(-3L_1 + 4L_2) \end{cases}$.

Un « mauvais exemple de résolution » : soit $(S): \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$. Alors, $(S): \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} (S'): \begin{cases} -x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$. Les

solutions (x, y) de (S) vérifient $x = -2$. Mais tous les couples $(-2, y)$ ne sont pas solutions car $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$.

Pour éviter cette dernière erreur, on va dans les systèmes à plus de 2 inconnues et/ou deux équations ordonner nos calculs et appliquer une méthode systématique qui évite une vérification perpétuelle (Cf paragraphe 5).

3. Résolution d'un système linéaire échelonné

Définition : Un système linéaire est **échelonné** lorsqu'en passant d'une ligne à la suivante, une inconnue « disparaît » (en fait son coefficient devient nul) et cette inconnue ne réapparaît sur aucune ligne suivante comme dans les exemples suivants :

Méthode : un système échelonné est facile à résoudre : on commence par la dernière ligne et on remonte comme illustré dans les exemples suivants :

$S_0: \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y - 3z$. Donc (S_0) a une infinité de solutions qui sont tous les triplets de la forme $(-y - 3z, y, z)$ tels que y et z réels. Autrement dit, $Sol(S_0) = \{(-y - 3z, y, z) / y, z \text{ réels}\}$. En exprimant x en fonction de y et z , y et z deviennent des inconnues secondaires.

Inconnue principale

$S_1: \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 2x - y + t = 0 \\ x + 2t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ y = 5 \\ x = 3 \\ t = -1 \end{cases}$. Donc $Sol(S_1) = \{(3, 5, 6, -1)\}$

je commence par la dernière ligne qui donne la valeur de t puis je réinjecte dans la ligne précédente (L3) pour obtenir la valeur de x puis je réinjecte dans la ligne précédente (L2) pour obtenir la valeur de y et enfin je réinjecte dans la ligne précédente (L1) pour obtenir la valeur de z

$S_2: \begin{cases} 2x + y + z + 4t = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}y - 3) \\ z = \frac{1}{2}(3y - 2) \\ x = 2 - 2y \end{cases}$. Donc $Sol(S_2) = \{(2 - 2y, y, \frac{3}{2}y - 1, \frac{3}{8}y - \frac{3}{4}) / y \text{ réel}\} = \{(2, 0, -1, -\frac{3}{4}) + y(-2, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{8}) / y \in \mathbb{R}\}$.

$S_3: \begin{cases} 2x + y + z + 4t = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$ n'a pas de solution à cause de sa dernière équation impossible. Donc $Sol(S_3) = \emptyset$.

Equation de compatibilité = équation sans inconnue qui peut être impossible ou toujours vraie ou dépendre de paramètres (mais jamais d'inconnues)

$S_4: \begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ x + 2z = 1 \\ z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - t \\ x = -3 - t \\ z = 2 \end{cases}$. Donc $Sol(S_4) = \{(-3, 4 - t, 2, t) / t \text{ réel}\} = \{(-3, 4, 2, 0) + t(0, -1, 0, 1) / t \text{ réel}\}$ et $rg(S_4) = 4$.

4. Résolution d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues

Exemple : un grand classique $(S): \begin{cases} x + y = p \\ x - y = q \end{cases}$

$(S): \begin{cases} x + y = p \\ x - y = q \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} (S'): \begin{cases} 2x = p + q \\ 2y = p - q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p+q}{2} \\ y = \frac{p-q}{2} \end{cases}$



Pour être certain que $S \Leftrightarrow S'$, il faut vérifier que l'on peut passer de S à S' et de S' à S en effectuant des calculs autorisés (notamment sans diviser par zéro). On va très vite donner trois opérations autorisées qui conservent les solutions et l'équivalence des systèmes.

Exemple : $(S): \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{29}(-3L_1 + 4L_2)]{L_1 \leftarrow 4L_1 - 3L_2} (S'): \begin{cases} 29y = 18 \\ 29x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{29} \\ y = \frac{18}{29} \end{cases}$



71

Exemple : (S): $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$

(S): $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ -6x + 2y = -2 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} (S): \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 0 = -1 \end{cases}$. (S) est donc incompatible.



72

Exemple : (S): $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ -6x + 2y = -6 \end{cases}$

(S): $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ -6x + 2y = -6 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} (S): \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y = 3x - 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

(S) est donc compatible et $Sol(S) = \{(x, 3x - 3) / x \in \mathbb{R}\}$



5. Résolution d'un système linéaire : méthode générale

73

Pour résoudre un système linéaire (S), on va le plus souvent faire des opérations élémentaires sur (S) dans le but d'obtenir un système linéaire équivalent à (S) et échelonné (donc facile à résoudre).

74

METHODE de résolution par échelonnement : Soit (S) un système linéaire. Pour résoudre (S) par échelonnement, les étapes sont

1. **Descente** : en effectuant des opérations élémentaires successives sur les lignes de (S), on échelonne (S) pour obtenir un système échelonné (S') équivalent à (S).
 - a) Je regarde s'il n'y a pas des opérations élémentaires évidentes permettant de simplifier considérablement (S). Et je les effectue l'une après l'autre (pas en même temps) . SI NONalors :
 - b) Faire apparaître dans (S) un coefficient égal à ± 1 devant l'une des inconnues par exemple x.
 - c) Placer la ligne contenant ce coefficient (=appelé pivot) en L_1 en échangeant deux lignes.
 - d) Utiliser cette L_1 pour éliminer les x sur les autres lignes en effectuant des opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$ avec $i \neq 1$. Comme je ne modifie pas L_1 et que j'utilise uniquement L_1 pour éliminer les x dans les AUTRES lignes, je peux faire plusieurs opérations simultanément. Les opérations inverses sont $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_1$ avec $i \neq 1$.
 - e) Les lignes $L_2, L_3 \dots$ ne contiennent plus de x. Appelons (S₁) le système formé des lignes $L_2, L_3 \dots$
 - f) Faire apparaître dans (S₁) un coefficient égal à ± 1 devant l'une des inconnues par exemple y.
 - g) Placer la ligne contenant ce nouveau pivot en ligne 2: L_2 de (S) (ce qui correspond à la ligne 1 de (S₁))
 - h) Utiliser cette L_2 pour éliminer les y sur les lignes suivantes.
 - i) (...)
2. **Remontée** : on résout (S') qui a les mêmes solutions que (S) .

75

Exemples de résolution par échelonnement de systèmes de 3 équations à 3 inconnues:

• S₁: $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 7x - 2y + 4z = 0 \\ 5x - y + 2z = -1 \end{cases} \xrightarrow[\text{je ne modifie pas } L_1]{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 11x + 2z = 2 \\ 7x + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \text{ et } L_1 \text{ inchangées}]{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 7x + z = 0 \\ 11x + 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 7x + z = 0 \\ -3z = 2 \end{cases}$ (système échelonné) *descente*

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + z - 2x \\ z = -7x \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + z - 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3} + z \\ z = (-7) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{3} + \frac{14}{3} = 7 \\ z = \frac{14}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_1) = \left\{ \left(-\frac{2}{3}; \frac{14}{3}; 7 \right) \right\}$. *remontée*

• S₂: $\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ x - 7y + 5z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{\text{je ne modifie pas } L_1} \begin{cases} x - 7y + 5z = -2 \\ 2x + 3y - 3z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \end{cases} \xrightarrow[\text{je ne modifie pas } L_1]{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix}} \begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ 17y - 13z = 5 \\ 17y - 13z = 5 \end{cases} \xrightarrow[\text{je ne modifie pas } L_1, ni L_2]{\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}} \begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ 17y - 13z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$ (système échelonné et compatible)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z - \frac{3}{2}\left(\frac{5}{17} + \frac{13}{17}z\right) \\ y = \frac{5}{17} + \frac{13}{17}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{17} + \frac{4}{17}z \\ y = \frac{5}{17} + \frac{13}{17}z \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_2) = \left\{ \left(\frac{1}{17} + \frac{4}{17}z, \frac{5}{17} + \frac{13}{17}z, z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}$.

76

Exemples de résolution par échelonnement d'autres systèmes linéaires:

Des systèmes presque échelonnés :

$$S_5: \begin{cases} 2x + y - z + t = 1_{(L_1)} \\ 10x - 2y + 4t = 0_{(L_2)} \\ 5x - y + 2t = -1_{(L_3)} \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_3]{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_3} \begin{cases} 2x + y - z + t = 1_{(L_1)} \\ 0 = 2_{(L_2)} \\ 5x - y + 2t = -1_{(L_3)} \end{cases} \text{Donc, } Sol(S_5) = \emptyset.$$

Inconnues principales

$$S_6: \begin{cases} 2x + y + 4z + 7t + w = 2_{(L_1)} \\ 3x - y + 3z = 1_{(L_2)} \\ 5x + y + z + t + 2w = 8_{(L_3)} \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - 7L_1]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} 5x + y + z + t + 2w = 8_{(L_1)} \\ 3x - y + 3z = 1_{(L_2)} \\ 2x + y + 4z + 7t + w = 2_{(L_3)} \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 + 7L_1]{L_3 \leftrightarrow L_3 - 7L_1} \begin{cases} 5x + y + z + t + 2w = 8_{(L_1)} \\ 3x - y + 3z = 1_{(L_2)} \\ -33x - 6y - 3z - 13w = -54 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} 5x + y + z + t + 2w = 8_{(L_1)} \\ -33x - 6y - 3z - 13w = -54_{(L_2)} \\ 3x - y + 3z = 1_{(L_3)} \end{cases} \xrightarrow{REMONTÉE} \begin{cases} t = \frac{-19}{39} - \frac{10}{39}y + \frac{8}{13}x_{(L_1)} \\ w = \frac{1}{13}(53 - 7y - 30x)_{(L_2)} \\ z = \frac{1}{3}(1 + y - 3x)_{(L_3)} \end{cases}$$

Système échelonné

Donc, $Sol(S_6) = \left\{ \left(x, y, \frac{1}{3}(1 + y - 3x), \frac{1}{13}(53 - 7y - 30x), -\frac{19}{39} - \frac{10}{39}y + \frac{8}{13}x \right) / x \text{ et } y \text{ réels} \right\}$.

Inconnues secondaires

77

Des systèmes à échelonner :

$$S_7: \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ x + 2y + 4z + 5t = 0 \\ x - y + 3z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 8 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ y - 2t = -2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ -3z - 6t = 6 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ -3z - 6t = 6 \end{cases}$$

je ne touche plus à L₁

$$\xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_4 + 6L_3]{L_4 \leftrightarrow L_4 - 3L_2} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ 6y + 9t = 9 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2]{L_4 \leftrightarrow L_4 + 3L_2} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ 6y + 9t = 9 \end{cases}$$

j'utilise L₂ pour éliminer les z dans les lignes L₃, L₄

$$\xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_4 - 6L_3]{L_4 \leftrightarrow L_4 + 6L_3} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ 21t = 21 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftrightarrow \frac{1}{21}L_4]{L_4 \leftrightarrow \frac{1}{21}L_4} \begin{cases} x + y + 4z + 7t = 2 \\ -2y - z - 5t = -1 \\ y - 2t = -2 \\ 1t = 1 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftrightarrow \frac{1}{21}L_4]{L_4 \leftrightarrow \frac{1}{21}L_4} \begin{cases} x = 11 \\ z = -4 \\ y = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

j'utilise L₁ pour éliminer les x dans les lignes L₂, L₃, L₄

j'utilise L₃ pour éliminer y dans L₄

Donc, $Sol(S_7) = \{(11, 0, -4, 1)\}$

Pivot = coefficient non nul utilisé pour éliminer l'inconnue correspondante dans les lignes suivantes
On essaie de choisir ou faire apparaître un pivot égal à ±1 pour simplifier les calculs.

Comme j'utilise une seule et même ligne pour éliminer une inconnue sur les autres lignes, il y a équivalence !!

$$S_8: \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2 - L_3]{L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2 - L_3} \begin{cases} 0 = -3 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \text{Donc, } Sol(S_8) = \emptyset.$$

$$S_{8bis}: \begin{cases} 5x + 3y + 7z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \\ 6x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_1 - L_3]{L_1 \leftrightarrow L_1 - L_3} \begin{cases} -x - y + 9z = -3 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \\ 6x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_1]{L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_1} \begin{cases} -x - y + 9z = -3 \\ -5y + 31z = -8 \\ 6x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$$

je fais apparaître un pivot égal à ±1

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - 6L_1]{L_3 \leftrightarrow L_3 - 6L_1} \begin{cases} -x - y + 9z = -3 \\ -5y + 31z = -8 \\ -2y + 52z = -15 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_3]{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_3} \begin{cases} -x - y + 9z = -3 \\ -y - 73z = 22 \\ -2y + 52z = -15 \end{cases}$$

je fais apparaître un pivot égal à ±1

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2]{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} -x - y + 9z = -3 \\ -y - 73z = 22 \\ 198z = -59 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2]{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} x = 3 + \frac{49}{198} + 9\left(-\frac{59}{198}\right) = \frac{56}{99} \\ y = 73 \times \frac{59}{198} - 22 = -\frac{49}{198} \\ z = -\frac{59}{198} \end{cases} \text{Donc, } Sol(S_{8bis}) = \left\{ \left(\frac{56}{99}, -\frac{49}{198}, -\frac{59}{198} \right) \right\}.$$

METHODE de résolution par substitution : on exprime l'une des inconnues en fonction des autres et on remplace dans les autres équations ... puis on recommence avec les autres équations : on y exprime une autre inconnue en fonctions des autres inconnues

Exemples de systèmes à résoudre par substitution :

$$S_9: \begin{cases} 5x + z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases} \text{ (un système de 3 équations à 3 inconnues.)}$$

$$S_9: \begin{cases} 5x + z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ 3\left(-\frac{1}{5}z\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}z\right) + 2z = -1 \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ \left(-\frac{3}{5} + \frac{3}{2} + 2\right)z = -\frac{1}{2} \\ y = 2 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ \left(\frac{29}{10}\right)z = -\frac{1}{2} \\ y = 2 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{29} \\ z = -\frac{5}{29} \\ y = 2 + \frac{15}{29} = \frac{73}{29} \end{cases} \text{ . Ainsi,}$$

$$Sol(S_9) = \left\{ \left(\frac{1}{29}, -\frac{5}{29}, \frac{73}{29} \right) \right\}.$$

$$S_{9bis}: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2z = 1 \\ t + z = 2 \end{cases} \quad (\text{un système de 3 équations à 4 inconnues.})$$

$$S_{9bis}: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2z = 1 \\ t + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 3z \\ x = 1 + 2z \\ t = 2 - z \end{cases} \text{ Donc, } Sol(S_{9bis}) = \{(1 + 2z, 1 + 3z, z, 2 - z) / z \in \mathbb{R}\}.$$

Des systèmes où l'on hésite : $S_{10}: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z + t = 1 \\ y + t + z = 2 \\ x + y + t = -1 \end{cases}$. On peut mixer les méthodes mais je vérifie toutes mes équivalences !!!

$$S_{10}: \begin{cases} 1x + y + z = 0 \\ x + z + t = 1 \\ y + t + z = 2 \\ x + y + t = -1 \end{cases} \xrightarrow[\text{par substitution}]{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ t - y = 1 \\ y + t + z = 2 \\ t - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = t - 1 \\ t - 1 + t + t + 1 = 2 \\ z = t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ Donc, } Sol(S_{10}) = \left\{ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right) \right\}.$$

• **METHODE de résolution de système à paramètre** : on cherche toujours les couples (x, y) ou les triplets (x, y, z) ou quadruplet (x, y, z, t) Mais le nombre de solutions et les solutions dépendront du (ou des) paramètre(s). Il faut surtout faire attention à bien détailler les opérations élémentaires effectuées et les opérations inverses pour ne pas diviser par un facteur dépendant du paramètre qui pourrait être nul pour certaines valeurs du (des) paramètre(s) : je vérifie toutes mes équivalences !!!

Des systèmes à paramètres :

$$\blacksquare S_{11}: \begin{cases} 1x + my + (m-1)z = 0 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m \end{cases} \xrightarrow[\text{par substitution}]{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (m-1)L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (m-1)L_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (2-3m)y + (m-3m+3)z = 3 \\ (m-m(m-1))y + ((m+1) - (m-1)^2)z = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (2-3m)y + (-2m+3)z = 3 \\ (2m-m^2)y + (3m-m^2)z = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (2-3m)y + (-2m+3)z = 3 \\ (2-m)my + (3-m)mz = m \end{cases}$$

1er cas $m = 0$. Alors $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \end{cases}$. Donc, $Sol(S_{11}) = \left\{ \left(-2z, -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2}, z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}$.

2ème cas $m \neq 0$. Alors $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (2-3m)y + (-2m+3)z = 3 \\ (2-m)y + (3-m)z = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{par substitution}]{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{matrix}} \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (-2-m)y - 3z = 1 \\ (2-m)y + (3-m)z = 1 \end{cases}$

$$S_{11} \xrightarrow[\text{par substitution}]{\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + \left(\frac{3-m}{3}\right)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{3-m}{3}\right)L_2 \end{matrix}} \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (-2-m)y - 3z = 1 \\ (2-m) + \frac{3-m}{3}(-2-m)y = 1 + \frac{3-m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (-2-m)y - 3z = 1 \\ (m^2 - 4m)y = 6 - m \end{cases}$$

1er sous-cas $m \neq 0$ et $m = 4$. Alors, $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + (m-1)z = 0 \\ (-2-m)y - 3z = 1 \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_{11}) = \emptyset$.

2ème sous-cas $m \neq 0$ et $m \neq 4$. Alors, $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m^2 - 2m - 4}{m(m-4)} \\ z = -\frac{4}{m(m-4)} \\ y = \frac{6-m}{m(m-4)} \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_{11}) = \left\{ \left(\frac{m^2 - 2m - 4}{m(m-4)}, \frac{6-m}{m(m-4)}, -\frac{4}{m(m-4)} \right) \right\}$.

$$\blacksquare S_{12}: \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases} \xrightarrow[\text{par substitution}]{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3 \end{matrix}} \begin{cases} x + 2y - z = a \\ 0 = b + a + c \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

1er cas: $a + b + c = 0$. Alors $S_{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ 0 = 0 \\ x + y - 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -y - z = c - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z - a + 2c \\ y = -z + a - c \end{cases}$

Donc, $Sol(S_{12}) = \{(3z - a + 2c, -z + a - c, z) / z \in \mathbb{R}\}$.

2ème cas: $a + b + c \neq 0$. Alors $Sol(S_{12}) = \emptyset$.

$$\blacksquare S_{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \lambda x \\ x + y + z = \lambda y \\ x + y + z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{par substitution}]{\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \end{matrix}} \begin{cases} (3-\lambda)x + (3-\lambda)y + (3-\lambda)z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

1er cas: $\lambda = 3$. $S_{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$. Donc, $Sol(S_{13}) = \{(z, z, z) / z \in \mathbb{R}\}$.

2ème cas: $\lambda \neq 3$. $S_{13} \xrightarrow[\text{par substitution}]{\begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{3-\lambda}L_1 \\ L_1 \leftarrow (3-\lambda)L_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -\lambda y = 0 \\ -\lambda z = 0 \end{cases}$.

1er sous-cas: $\lambda = 0$. Alors, $S_{13} \Leftrightarrow x = -y - z$. Donc, $Sol(S_{13}) = \{(-y - z, y, z) / (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

2ème sous-cas: $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 3$. Alors, $S_{13} \Leftrightarrow x = y = z = 0$. Donc, $Sol(S_{13}) = \{(0, 0, 0)\}$.