Premières fonctions réelles.

I. La partie entière d'un réel.

1 **Définition de la partie entière d'un réel.** Soit x un réel, Le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x s'appelle la **partie entière** de x, notée $\lfloor x \rfloor$. Autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

2 **Exemple :** $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

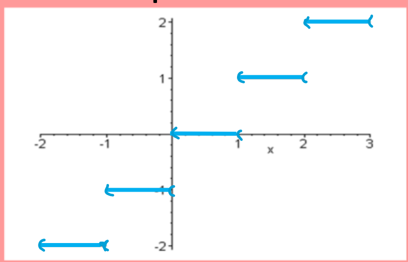
3 **Caractérisation de la parte entière** Soit k un entier relatif et x un réel.
Alors : $k = \lfloor x \rfloor$ si et ssi $k \leq x < k+1$.
Autrement dit, si un réel est encadré par deux entiers consécutifs et ne peut pas être égal au plus grand de ces deux entiers alors le plus petit des deux entiers est la partie entière de ce réel.

4 **Exercice :** Soit n un entier naturel. Montrer que : $\left\lfloor \sqrt{n^2+7n+12} \right\rfloor = n+3$.

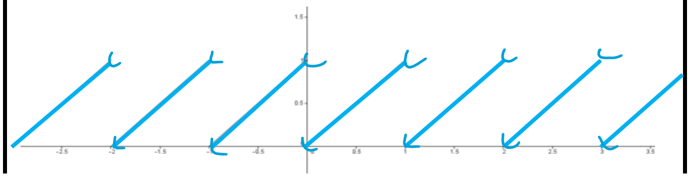
5 **Propriété de la partie entière Soit** x et y deux réels
1) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
2) $x = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
3) $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
4) $x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$
5) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \leq x \Rightarrow n \leq \lfloor x \rfloor$. $\forall n \in \mathbb{Z},\ n > x \Rightarrow n \geq \lfloor x \rfloor + 1$.

6 On définit ainsi la <u>**fonction partie entière** $E : (x \mapsto \lfloor x \rfloor)$ **définie sur** $\mathbb{R}$</u>.

7 La **courbe de la fonction partie entière** est :



8 La courbe de la fonction $(x \to x - \lfloor x \rfloor)$ dite **partie décimale** est :

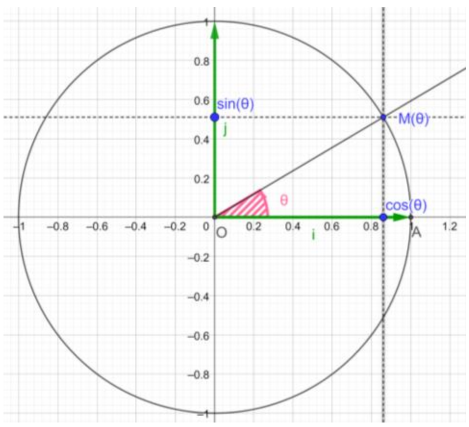


9 **Exercice** : Soit x et y deux réels distincts tels que : $y < x$.
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique entier relatif tel que : $p10^{-n} \leq x < p10^{-n} + 10^{-n}$.
2. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $y < r < x$. Cela signifie que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tel que $y < t < x$. Cela signifie que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

II. Sinus et cosinus d'un nombre réel.

1. Définitions et premières formules de trigonométrie

10 **Définition :** Soit θ un réel. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,on note $M(\theta)$ le point tel que : $OM = 1$ et $\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}\right) = \theta$. Par définition, $\cos(\theta)$ *est l'abscisse de* $M(\theta)$ *et* $\sin(\theta)$ *est l'ordonnée de* $M(\theta)$.



11
$$\cos\theta = \cos(\theta) \underbrace{=}_{def} abscisse\ de\ M(\theta)$$
$$\sin\theta = \sin(\theta) \overset{def}{=} ordonnée\ de\ M(\theta)$$

12 **Exercice** : avec cette définition , résoudre les équations suivantes d'inconnue θ réelle.

1. $\cos(\theta) = 0$
2. $\sin(\theta) = 0$
3. $\sin(\theta) = 1$

On en déduit les propriétés suivantes (à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique) :

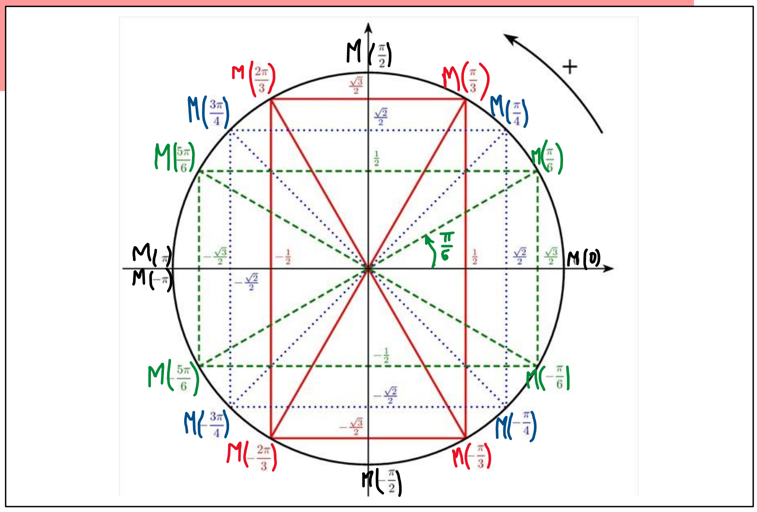
13 **Premières formules de trigonométrie :** Soit θ un réel et k un entier relatif.

1. $|sin\theta| \leq 1$ et $|cos\theta| \leq 1$
2. $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$
3. $\cos(\theta + 2k\pi) = cos\theta$ et $\sin(\theta + 2k\pi) = sin\theta$
4. $\cos(-\theta) = cos\theta \; et \; \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
5. $\cos(\theta + \pi) = -cos\theta \; et \; \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$
6. $\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k cos\theta \; et \; \sin(\theta + k\pi) = (-1)^k \sin(\theta)$
7. $\cos(\pi - \theta) = -cos\theta \; et \; \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
8. $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta$ et $sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$

A savoir retrouver très rapidement que le cercle trigonométrique

14 **Quelques valeurs à connaitre :**

θ	$cos\theta$	$sin\theta$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1



15 **Exemple** :Calculons $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{87\pi}{4}\right)$

2. Equations et inéquations trigonométriques

Lire les solutions sur le cercle trigonométrique.

16 **1)** Soit x et a des réels.

- $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x \; est \; de \; la \; forme \; a + 2k\pi \; ou - a + 2k\pi \; tq \; k \in \mathbb{Z}$
  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = a + 2k\pi \; ou \; x = -a + 2k\pi$
- $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x \; est \; de \; la \; forme \; a + 2k\pi \; ou \; \pi - a + 2k\pi \; tq \; k \in \mathbb{Z}$
  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = a + 2k\pi \; ou \; x = \pi - a + 2k\pi$

17 **2)** Soit m un réel. Résolvons l'équation $\cos(x) = m$, d'inconnue x réelle.

- si $|m| > 1$ alors l'équation $\cos(x) = m$ n'a aucune solution
- si $|m| \leq 1$ alors l'équation $\cos(x) = m$ a une unique solution dans $[0, \pi]$ et a une infinité de solutions réelles .

18 **Def :** $Arccos(m)$, l'arccosinus du réel $m \; tq \; |m| \leq 1$, est l'unique solution dans $[0, \pi]$ de l'équation $\cos(x) = m$.
$Arccos(m)$ n'esiste que si $m \in [-1,1]$ et, le cas échéant, est l'unique réel de $[0, \pi]$dont le cosinus vaut m.

19 **3)** Soit m un réel. Résolvons l'équation $\sin(x) = m$, d'inconnue x réelle.

- si $|m| > 1$ alors l'équation $\sin(x) = m$ n'a aucune solution
- si $|m| \leq 1$ alors l'équation $\sin(x) = m$ a une unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et a une infinité de solutions réelles .

20 **Def :** $Arcsin(m)$, l'arcsinus du réel $m \; tq \; |m| \leq 1$, est l'unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $\sin(x) =$ m. $Arcsin(m)$ n'esiste que si $m \in [-1,1]$ et, le cas échéant, est l'unique réel de $[0, \pi]$dont le sinus vaut m.

21 **4)** Soit m un réel. L'inéquation $\cos(x) > m$, d'inconnue x réelle, admet :

- Aucune solution si $m > 1$.
- Tous les réels si $m \leq -1$.
- Une infinité de solutions si $|m| \leq 1$ qui sont tous les réels se trouvant dans un intervalle de la forme

$]-a + 2k\pi; a + 2k\pi[\; tq \; k \in \mathbb{Z}$ où a est un réel positif vérifiant $m = \cos(a)$; $a = \arccos(m)$ convient.

22 **Déf :** On dit que « x est **congru à** a **modulo** 2π » lorsqu'il existe un entier k dans $\mathbb{Z}$ tel que : $x = a + k2\pi$.
On note alors : $x \equiv a[2\pi]$

23 **Alors,** ($cosx = cosa \Leftrightarrow (x \equiv a[2\pi] \; ou \; x \equiv -a[2\pi])$) et ($sinx = sina \Leftrightarrow (x \equiv a[2\pi] \; ou \; x \equiv \pi - a[2\pi])$))

24 **Exercice** :

1) Résolvons $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
2) Résolvons $\begin{cases} \sin(x) = -\frac{1}{8} \\ \cos(x) = -\frac{\sqrt{63}}{8} \end{cases}$.
3) Résolvons $\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$
4) Résolvons $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(2x)$.

3. D'autres formules de trigonometrie

25 **Formules d'addition** Soit a et b des réels. $\begin{cases}\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\end{cases}$

$$\begin{cases}\cos(a-b)=cosacosb+sinasinb\\ \sin(a-b)=sinacosb-sinbcosa\end{cases}$$

Formules d'angle double : Soit θ un réel. $\begin{cases}\cos(2\theta)=cos^2\theta-sin^2\theta=2cos^2\theta-1=1-2sin^2\theta\\ \sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta\end{cases}$

26 **Exemples :** 1) Calculons $cos\frac{\pi}{12}$ et $cos\frac{\pi}{8}$.

2) Calculons $\int_0^{\pi/2} sin^2(3t)dt$.

27 **Transformation de produits en sommes et de sommes en produits A SAVOIR RETROUVER**

Soit a et b deux réels. $\begin{cases}\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]\\ \sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]\\ \sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]\end{cases}$.

Soit p et q des réels. $\begin{cases}cos(p)+cos(q)=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ cos(p)-cos(q)=-2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ sin(p)+sin(q)=2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{cases}$.

28 **Exemples d'application :** 2) Calculons $\int_0^{\pi/2} sin(3t-2)\sin(2t+1)dt$.

2) Chercher le signe de $f:(x\mapsto\cos(2x)-\cos(\frac{\pi}{4}-4x))$.

29 **Méthode pour écrire $f(t)=Acos(\omega t)+Bsin(\omega t)$ sous la forme $Ccos(\omega t+\varphi)$**

1) Mettre $\sqrt{A^2+B^2}$en facteur dans $f(t)$
2) Trouver l'angle θ tel que $cos\theta=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $sin\theta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
3) Reconnaitre le développement de $\cos(x+y)$:

30 **Exemples d'application** : 1) Résoudre l'équation $cost-sint=1$ d'inconnue t réelle.

2) Chercher le signe de $f:(x\mapsto\sqrt{3}cost-sint)$.

4. Fonctions sinus et cosinus

On définit ainsi **<u>les fonctions réelles : sinus $(x\mapsto\sin(x))$, cosinus $(x\mapsto\cos(x))$</u>**

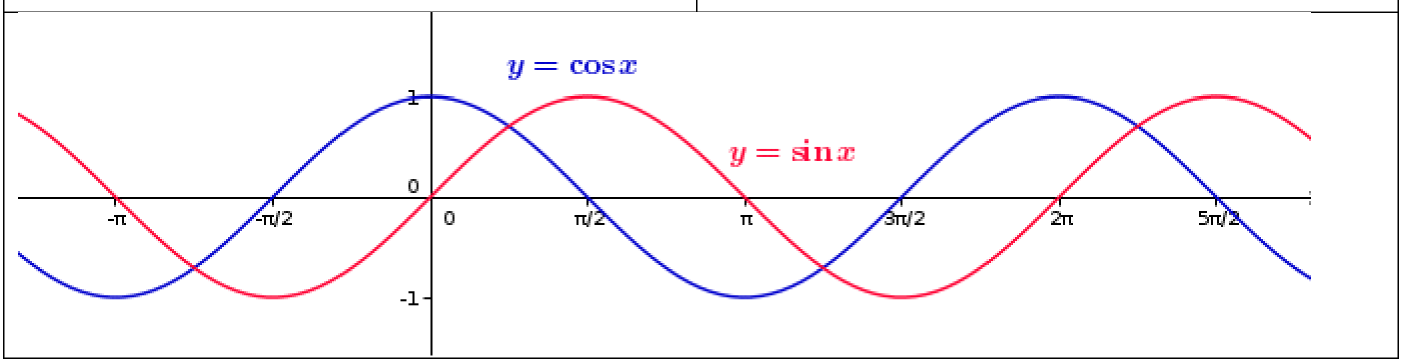
31

Sinus est	Cosinus est
• 2π −périodique (puisque $\forall x\in\mathbb{R}, sin(x+2\pi)=sin(x)$) • impaire (puisque $\forall x\in\mathbb{R}, sin(-x)=-sin(x)$) • continue sur $\mathbb{R}$ (puisque $\forall a\in\mathbb{R}, \lim_{x\to a} sin(x)=sin(a)$).	• 2π −périodique (puisque $\forall x\in\mathbb{R}, cos(x+2\pi)=cos(x)$) • impaire (puisque $\forall x\in\mathbb{R}, cos(-x)=cos(x)$) • continue sur $\mathbb{R}$ (puisque $\forall a\in\mathbb{R}, \lim_{x\to a} cos(x)=cos(a)$)

32 **Théorème** les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, sin'(x)=\cos(x)\ et\ cos'(x)=-sin(x)$.

En particulier, $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$

33



34 **<u>Ex :</u>** Calcul de $\int_{t=0}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)sin(2t)dt$

35 **<u>Théorème</u>** $\forall x\in\mathbb{R}, |sin(x)|\leq|x|$.

III. Tangente d'un nombre réel.

1. Définitions de premières propriétés

36 **Définition :** La tangente d'un réel θ distinct de toutes les valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi \ tel \ que \ k \in \mathbb{Z}$ est le réel : $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

37 **NB :** $cos(X)$ et $sin(X)$ existent quel que soit le réel X .
Mais, $\tan(X)$ existe $\Leftrightarrow$ X est un réel distinct de toutes les valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi \ tel \ que \ k \in \mathbb{Z}$.

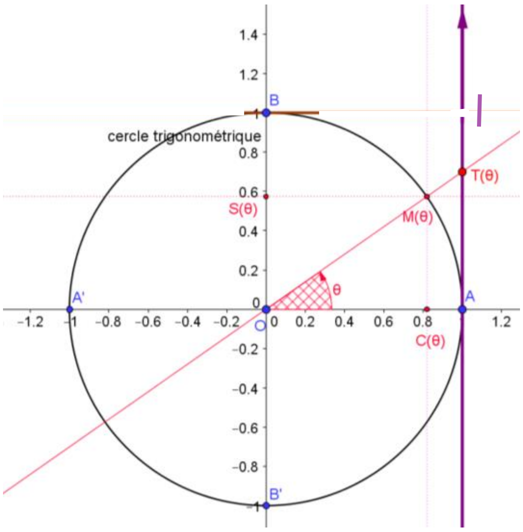
38 **Complément :** La cotangente d'un réel θ distinct de toutes les valeurs $k\pi \ tel \ que \ k \in \mathbb{Z}$ est le réel $cotan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

39 **Lecture de $\tan(\boldsymbol{\theta})$ sur le cercle trigonométrique** :

$cos\theta = \overline{OC}$

$sin\theta = \overline{OS}$

$tan\theta = \overline{AT}$



On en déduit les propriétés suivantes (à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique) :

40 **Premières formules de trigonométrie :** Soit θ un réel et k un entier relatif

1. $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta)$
2. $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
3. $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$
4. $1 + tan^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}$
5. $tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{tan\theta}$
6. $tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{tan\theta}$

41 **Quelques valeurs à connaitre :**

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{tan\theta}$
0	0
$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	1
$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\sqrt{3}$
$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	N'existe pas

2. Equations et inéquations trigonométriques

42 **1)** Soit x et a des réels.

- $tan(x) = tan(a) \Leftrightarrow x \ est \ de \ la \ forme \ a + k\pi \ \ tq \ k \in \mathbb{Z}$.
$\Leftrightarrow \exists k \in \frac{\mathbb{Z}}{x} = a + k\pi \ \Leftrightarrow (x \equiv a[\pi]\ )$

43 **2)** L'équation $\tan(x) = m$, d'inconnue x , a une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et a toujours une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$.

44 **Def :** $Arctan(m)$, l'arctangente du réel m, est l'unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan(x) = m$. $Arctan(m) \ existe \ pour \ tout \ réel \ m \ et$, est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut m.

Les solutions de l'équation $\tan(x) = m$ sont tous les réels $a + k\pi$ tq $k \in \mathbb{Z}$ où a est une solution particulière de l'équation ; $a = Arctan(m)$ convient.

3. D'autres formules de trigonométrie

45 **Formules d'addition** Soit $a \ et \ b$ des réels

Si $tan(a + b)$,$tan(a)$ et $tan(b)$ existent, $alors$ $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

Formules d'angle double : Soit θ un réel.

Si $tan(\theta)$ et $tan(2\theta)$ existent, existent, $alors$ $\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)^2}$.

46 **Exemple :** Complétons $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \tan(\dots)$

4. La fonction tangente

47 On définit ainsi **la fonction réelle : tangente $(x \mapsto \tan(x))$**

Tangente est

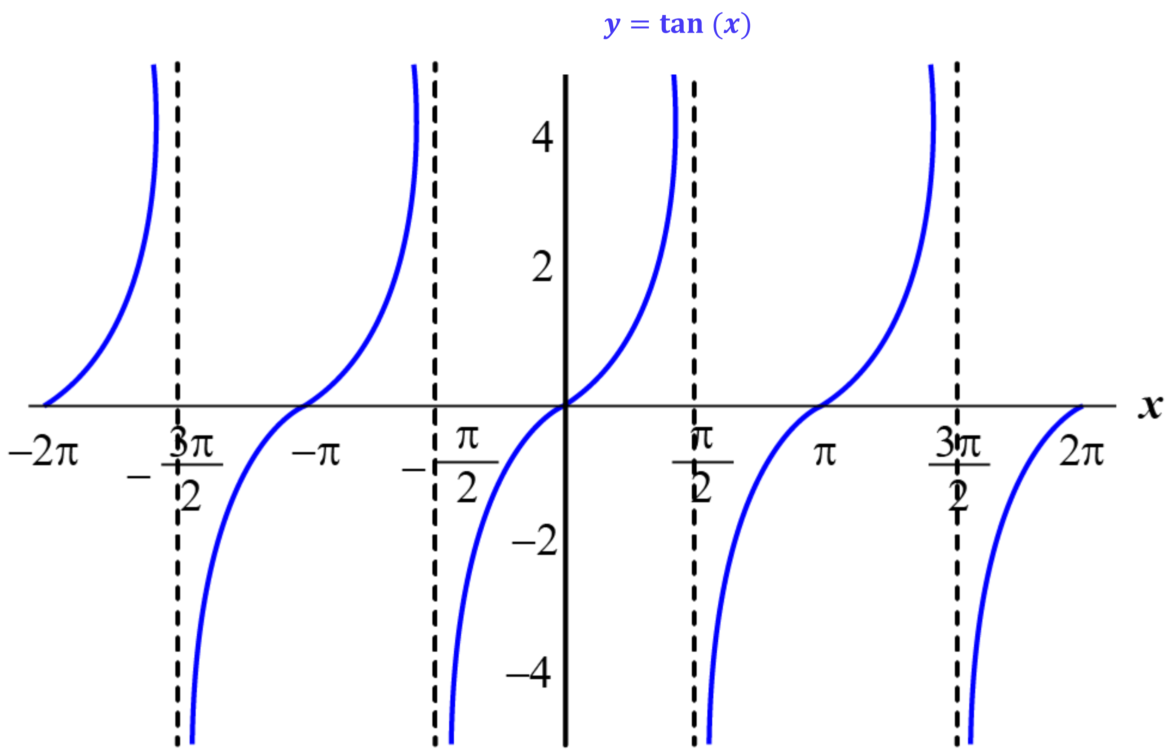
- π −périodique (puisque $\forall x \in D_{tan}, x+\pi \in D_{tan}$ et $tan(x+\pi) = tan(x)$)
- impaire (puisque $\forall x \in D_{tan}, -x \in D_{tan} tan(-x) = -tan(x)$)
- continue sur D_{tan} (puisque $\forall a \in D_{tan}, \lim_{x \to a} tan(x) = tan(a)$)

48 **Théorème** : la fonction tangente est dérivable sur D_{tan} et $\forall x \in D_{tan}, tan'(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$.

49 **Conséquence :** la fonction tangente est strictement croissante sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

De plus, $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \tan(x) = +\infty$. D'où le tableau des limites et variations de tan :

50 **Attention :** la fonction tangente n'est pas strictement croissante sur D_{tan}.

51 

IV. Puissances entières d'un nombre réel.

52 **Définition:** pour tout réel x et tout entier naturel p non nul, $x^0 = 1$ et

$$x^p = x \times x \times \ldots \times x = x^{p-1} \times x \quad .$$

Pour tout réel x non nul et tout entier naturel p , $x^{-p} \equiv \frac{1}{x^p} = \left(\frac{1}{x}\right)^p$.

On peut aussi définir les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puissances entières : $f_p: (x \mapsto x^p)$ tq p entier relatif.

53 **Théorème** : Soit $p \in \mathbb{Z}$. $f_p: (x \mapsto x^p)$ est dérivable sur son domaine de définition

et $\forall x \in Df, f'(x) = \begin{cases} px^{p-1} si\ p \neq 0 \\ 0\ si\ p = 0 \end{cases}$. De plus, f_p et p ont la même parité.

54 **Conséquence :**

Toute fonction polynomiale réelle f telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Et par suite, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2}$.

55 **Allure des fonctions puissances RÉELLES :**

Fonction $(x \mapsto x^n)$ où n entier naturel pair $n \geq 2$	Fonction $(x \mapsto x^n)$ où n entier naturel impair $n \geq 3$.	Fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{x^n}\right)$ où n entier naturel impair	Fonction r $\left(x \mapsto \frac{1}{x^n}\right)$ où n entier naturel pair et $n \geq 2$.

V. Racine $n^{\text{ième}}$ réelle d'un réel.

56 **Définition :**

- Soit n un entier naturel pair et $f_n : (x \mapsto x^n)$. Tout réel x strictement positif a deux antécédents de signe opposé par f_n et 0 est l'unique antécédent de 0. Par définition, pour tout réel x positif, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel positif qui élevé à la puissance n vaut x.
- Soit n un entier naturel impair et $f_n : (x \mapsto x^n)$. Tout réel x a un unique antécédent par f_n. Par définition, pour tout réel x, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel qui élevé à la puissance n vaut x.
- Autre notation : $\sqrt[n]{x}$ est encore noté $x^{\frac{1}{n}}$. On a donc $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

57 NB : On peut désormais résoudre toutes les équations de la forme : $t^n = a$ où t inconnue réelle et a réel fixé.
si n est un entier naturel pair et a strictement négatif alors l'équation n'a aucune solution
si n est un entier naturel pair et a positif alors $t^n = a \Leftrightarrow t = \sqrt[n]{a}\ ou\ t = -\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow |t| = \sqrt[n]{a}$.
si n est un entier naturel impair alors $t^n = a \Leftrightarrow t = \sqrt[n]{a}$.

58 **Déf :** Soit $r \in \mathbb{Q}$. Alors, $r = \frac{p}{q}$ avec $p\ et\ q$ entiers premiers entre eux. Par définition, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ pour x réel éventuellement non nul et ou positif.

Les puissances rationnelles suivent les mêmes règles de calcul que les puissances entières

59 **Règles de calcul sur les puissances :** Pour tous nombres rationnels r et s, pour tous réels (ou complexes) $x\ et\ y$ éventuellement non nuls $x^r x^s = x^{r+s}$, $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$, $(x^s)^r = x^{rs}$. , $x^s y^s = (xy)^s$, $\frac{x^s}{y^s} = \left(\frac{x}{y}\right)^s$

On définit ainsi les fonctions racines nièmes réelles $f_{\frac{1}{n}} : (x \mapsto \sqrt[n]{x})$.

60 **Théorème** : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $f_p : \left(x \mapsto x^{\frac{1}{p}}\right)$ est **strictement croissante** sur son domaine de définition et est dérivable sur son domaine de définition privé de 0 mais n'est pas dérivable en 0 et $\forall x \in Df\backslash\{0\}, f'(x) = \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}$.

61

Allure des fonctions racines n$ièmes$ RÉELLES : n **pair**	n **impair.** $f_{\frac{1}{n}}$ $est\ impair.$