TD 1
Récurrence. Sommes et produits finis.
Premières suites. Systèmes linéaires.

EX 0

1. VRAI OU FAUX (justifier)

- $\sum_{k=1}^{n}(\lambda + a_k) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} a_k$ F
- $\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$ V
- $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ V
- $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$ F
- $\sum_{k=1}^{n}(a_k \times b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$ F
- $\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} 3^k\right) = \sum_{k=1}^{n} 6^k$ F
- $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(a_i \times b_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$ V

2. Compléter :

Le logarithme transforme un produit en somme.

L'exponentielle transforme une somme en produit.

- $\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$
- $\sum_{k=P}^{N}(a_k - a_{k-1}) = a_N - a_{P-1}$
- $5^P + 5^{P+1} + 5^{P+2} + \cdots + 5^{N-1} + 5^N + 5^{N+1} = \frac{5^{N-P+1}-1}{5-1}5^P$
- $9 + 16 + 25 + 36 + \cdots . +225 = \sum_{k=3}^{15} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{15} k^2\right) - 1 - 4 = \frac{15 \times 16 \times 31}{6} - 5$
- $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = 2^{2n} = 4^n$.
- $1 + x^{2n+1} = 1 - (-x)^{2n+1} = (1-(-x))\left(\sum_{k=0}^{2n}(-x)^k\right) = (1+x)(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{2n-1} + x^{2n})$.

3. Rappeler les propriétés et les généraliser . Démontrer cette généralisation par récurrence.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, x^{n+m} = x^n \times x^m$. **Généralisation :** $\forall (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n, x^{\sum_{k=1}^{n} i_k} = \prod_{k=1}^{n} x^{i_k}$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a e^b$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (e^a)^n = e^{na}$. **Généralisation :** $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, e^{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \prod_{k=1}^{n} e^{a_k}$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n\ln(a)$ **Généralisation** : $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$

I Des récurrences

Ex 1 Montrer (de deux manières : par récurrence et par télescopage)que pour tout entier naturel n non nul , $\sum_{k=1}^{n} k \times k\,! = (n+1)\,! - 1$.

Ex 2 Soit u la suite définie par : $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Ex 3 Soit (u_n) une suite réelle vérifiant: $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $u_n + 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = (3n-2)(-2)^{n-1}$. Représenter la suite (u_n) .
2. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Ex 4 Soit (u_n) une suite réelle vérifiant les propriétés suivantes : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)(u_{n+1} + u_n)$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Ex 5 Soit u la suite définie par : $u_0 = 2 et \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4u_n + \sqrt{1 + 24u_n})$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}}$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

II Des calculs de sommes et produits

Ex 6 Calculer les sommes et produits suivants (p et n sont des entiers naturels et x un réel) :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{3n} 2^{k+1}$
2. $S(n) = \sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{3^{n+2k}}{4^{k+1}} + \binom{n+1}{k+1}2^{1-k} - 5(k+2)^3\right)$
3. $V_n(x) = \sum_{k=0}^{3n} e^{-kx}$ et $w_n = \prod_{k=1}^{2n} e^{kx}$
4. $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$.

5. $S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p}$ et $T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{p}{k}$ où $n > p$

6. $U_n = \prod_{k=0}^{n} x^k$

$$\mathbf{1.}\, S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1) = \underbrace{1-3}_{=-2}\underbrace{+5-7}_{=-2} + \cdots \ldots + (-1)^n(2n+1).$$

Si n est impair alors $n+1$ est pair et $S_n = \underbrace{1-3}_{=-2}\underbrace{+5-7}_{=-2} + \cdots \ldots \underbrace{+(2n-1)-(2n+1)}_{=-2} \underset{\text{deux par deux}}{\overset{\substack{\text{car il y a}\\ n+1 \text{ termes}\\ \text{dans la somme}\\ \text{et qu'on les regroupe}}}{\triangleq}} \frac{(-2)(n+1)}{2} = -(n+1).$

Si n est pair alors $n+1$ est impair et $S_n = [\underbrace{1-3}_{=-2}\underbrace{+5-7}_{=2} + \cdots \ldots \underbrace{+(2n-3)-(2n-1)}_{=-2}] + (2n+1) = -2\frac{n}{2} + (2n+1) = n+1.$

2. $S_n = \sum_{k=10}^{3n} 2^{k+1} = \sum_{k=10}^{3n} 2^{k+1} = 2\sum_{k=10}^{3n} 2^k = 2\frac{2^{3n-9}-1}{2-1}2^{10} = (2^{3n-9}-1)2^{11}$

3. $E_n(x) = \sum_{k=2n}^{n^2} e^{-kx} = \sum_{k=2n}^{n^2}(e^{-x})^k = \begin{cases} \frac{(e^{-x})^{n^2-2n+1}-1}{e^{-x}-1} = \frac{(e^{-(n-1)^2x}-1}{e^{-x}-1} \; si\; e^{-x} \neq 1 \; i.e.\; x=0 \\ n^2-2n+1 = (n-1)^2 \; si\; e^{-x} = 1\; i.e.\; x = 0 \end{cases}$

$F_n = \prod_{k=n}^{2n} e^{kx} = e^{\sum_{k=n}^{2n} kx} = e^{x\sum_{k=n}^{2n} k} = e^{x(\sum_{k=0}^{2n} k - \sum_{k=0}^{n-1} k)} = e^{x\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}\right)} = e^{x\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}\right)} = e^{x\left(\frac{3(n^2+n)}{2}\right)}$

4. $A(n) = \sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{3^{n+2k}}{4^{k+1}}\right) + \sum_{k=2}^{n-2}\binom{n+1}{k+1}2^{1-k} - 5\sum_{k=2}^{n-2}(k+2)^3 = \frac{3^n}{4}\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{9}{4}\right)^k + \sum_{j=3}^{n-1}\binom{n+1}{j}2^{1-(j-1)} - 5\sum_{k=2}^{n-2}(k+2)^3$

Calculons les trois sommes séparément :

■$\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{3^{n+2k}}{4^{k+1}}\right) = \frac{3^n}{4}\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{9}{4}\right)^k = \frac{3^n}{4}\left(\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^{n-3}-1}{\frac{9}{4}-1}\right)\left(\frac{9}{4}\right)^2. = 3^n\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{9}{4}\right)^2}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{3^{3n-2}}{4^{n-1}}\right) - \frac{3^{n+4}}{80}$. (vérification : $\sum_{k=2}^{4-2}\left(\frac{3^{n+2k}}{4^{k+1}}\right) = \frac{3^{4+4}}{4^{3+1}}$ et $\frac{4}{5}\left(\frac{3^{10}}{4^4}\right) - \frac{3^8}{5\times16} = \frac{1}{5}\left(\frac{3^{10}}{4^3}\right) - \frac{3^8}{5\times4^2} = \frac{3^8}{5\times4^3}(3^2-4) = \frac{3^8}{4^3}$. $ok!$)

■$\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n+1}{k+1}2^{1-k} \underbrace{=}_{\substack{j=k+1\\ k=j-1\\ k\in[\![2,n-2]\!]\Leftrightarrow j\in[\![3,n-1]\!]}} \sum_{j=3}^{n-1}\binom{n+1}{j}2^{1-(j-1)} = 4\sum_{j=3}^{n-1}\binom{n+1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j$

$= 4\left[\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\right) - \binom{n+1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \binom{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \binom{n+1}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 - \binom{n+1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \binom{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

$= 4\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)n}{8}\right] = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 6 - \frac{5}{2}n - \frac{n^2}{2}$

$= 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} + (n+1)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 8 - 5n - n^2$ (vérification : $\sum_{k=2}^{4-2}\binom{4+1}{k+1}2^{1-k} = \frac{\binom{5}{3}}{2} = \frac{10}{2} = 5$ et $4\left(\frac{3}{2}\right)^{4+1} - \left(\frac{1}{2} + (4+1)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} - 6 - \frac{5}{2}\times4 - \frac{16}{2} = \frac{243}{8} - \frac{11}{8} - 24 = 29 - 24 = 5$ $ok!$)

■$\sum_{k=2}^{n-2}(k+2)^3 = \sum_{k=4}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 - \sum_{k=0}^{3} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{9\times16}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 36.$ (vérification : $\sum_{k=2}^{4-2}(k+2)^3 = 4^3 = 64$ et $\frac{(4)^2(5)^2}{4} - 36 = 100 - 36 = 64$ $ok!$)

Ainsi, $A(n) = \frac{1}{5}\left(\frac{3^{3n-2}}{4^{n-1}}\right) - \frac{3^{n+4}}{80} + 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} + (n+1)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 8 - 5n - n^2 - 5\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 36\right].$

5. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}1^k1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = 4^n.$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1}(-1)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}(-1)^k1^{2n-k} = (-1+1)^{2n} = 0^{2n} = \begin{cases}0 \; si\; n > 0\\ 1\; si\; n = 0\end{cases}.$

$Si\; n = 0\; alors\; \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = 1$.

$Si\; n = 0\; alors\; en\; posant\; S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\; et\; T_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1}, on\; a$ $\begin{cases}S_n + T_n = 4^n\\ S_n - T_n = 0\end{cases}$ donc $T_n = S_n = \frac{1}{2}4^n = 2^{2n-1}$.

6. Soit $n > p$. $S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n+1}\underbrace{\binom{k+1}{p+1}}_{u_{k+1}} - \underbrace{\binom{k}{p+1}}_{u_k} \underbrace{=}_{\substack{somme\\ télescopique}} u_{n+2} - u_p = \binom{n+2}{p+1} - \underbrace{\binom{p}{p+1}}_{=0} = \binom{n+2}{p+1}$

$T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 2^p.$

7. $U_n = \prod_{k=0}^{n} x^k = x^{\sum_{k=0}^{n} k} = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$V_n = \prod_{j=0}^{n}\frac{2j+1}{2j-3} = \frac{\prod_{j=0}^{n}(2j+1)}{\prod_{j=0}^{n}(2j-3)} = \frac{(2n-1)(2n+1)\prod_{j=0}^{n-2}(2j+1)}{(-3)(-1)\prod_{k=0}^{n-2}(2k+1)} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{3}$

$W_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right) = \underbrace{\left[\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\right]}_{\substack{produit\\ télescopique}}\underbrace{\left[\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\right]}_{\substack{produit\\ télescopique}} = \frac{1}{n}\frac{(n+1)}{2}$

$Y_n = \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}}_{\substack{produit\\ télescopique}} = \frac{\binom{n}{0}}{\binom{n}{n}} = 1.$

Ex 7 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.Ecrire avec des factorielles les produits suivants : $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(n(n+p) - k(k+p))$ et $Q_n = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\big(n(n+p) - k(k+p)\big) = \prod_{k=0}^{n-1}(n^2+np-kp-k^2) = \prod_{k=0}^{n-1}\big((n-k)(n+k) + (n-k)p\big) = \prod_{k=0}^{n-1}(n-k)(n+k+p)$$

$P_n = [\prod_{k=0}^{n-1}(n-k)][\prod_{k=0}^{n-1}(n+k+p)] = [n\times(n-1)\times\ldots\times1][(n+p)\times(n+p+1)\times\ldots\times(2n+p-1)] = n!\frac{(2n+p-1)!}{(n+p-1)!} = (n!)^2\binom{2n+p-1}{n+p-1}.$

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \left[\prod_{k=1}^{n} k\right]\left[\prod_{k=1}^{n}(n-k+1)\right] \underbrace{=}_{\substack{j=n-k+1\\ i.e.\; k=n-j+1\\ k\in[\![1,n]\!]\Leftrightarrow j\in[\![1,n]\!]}} (n!)\times\left[\prod_{j=1}^{n} j\right] = (n!)^2.$$

Ex 8 Soit n un entier strictement positif. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$.

1. Effectuer le changement d'indice $p = 2n+1-k$.

2. En déduire la valeur de S_n .

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} \underbrace{=}_{\substack{p=2n+1-k\\ k=2n+1-p\\ k\in[\![0,n]\!]\Leftrightarrow p\in[\![n+1,2n]\!]}} \sum_{p=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n+1-p} \underbrace{=}_{\substack{car\; si\; 0\le P\le N,\\ \binom{N}{P}=\binom{N}{N-P}}} \sum_{p=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}.$

2. Alors $2S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} + \sum_{p=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{p} = \sum_{p=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}1^p1^{2n+1-p} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} = 2\times4^n.$

Ex 9 Télescopage

1. Calculer $V_n = \prod_{j=0}^{n} \frac{2j+1}{2j-3}$, $W_n = \prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$ $et\ Y_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$
2. Calculer $S_n = \sum_{k=3}^{n} ln\left(\frac{k^2-4}{k^2+k}\right)$ $où\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1;2\}$. En déduire la limite de (S_n).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$. En déduire la limite de (S_n).
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. En déduire la limite de (S_n).
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$. En déduire la limite de (S_n).
6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$ .En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$ $tq\ n \in \mathbb{N}^*$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\,;1\,;2\}$.

$S_n = \sum_{k=3}^{n} ln\left(\frac{k^2-4}{k^2+k}\right) = \sum_{k=3}^{n} ln\left(\frac{(k-2)(k+2)}{k(k+1)}\right) = \sum_{k=3}^{n} \ln(k-2)+\ln(k+2)-\ln(k)-\ln(k+1)$

$$S_n = \underbrace{\sum_{k=3}^{n}[\ln(k+2)-\ln(k+1)]}_{\substack{somme\\ télescopique}} + \sum_{k=3}^{n}\ln(k-2) - \sum_{k=3}^{n}\ln(k) = \ln(n+2)-\ln(4)+\sum_{k=1}^{n-2}\ln(k)-\sum_{k=3}^{n}\ln(k)$$

$= \ln(n+2) - \underbrace{\ln(4)}_{=2\ln(2)} + \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \ln(2) + [\sum_{k=3}^{n-2}\ln(k)] - \ln(n-1) - \ln(n) - [\sum_{k=3}^{n-2}\ln(k)] = \ln\left[\frac{n+2}{(n-1)n}\right] - \ln(2) = \ln\left[\frac{1+\frac{2}{n}}{(n-1)}\right] - \ln(2)$.

Donc, $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \underbrace{=}_{\substack{quantité\\ conjuguée}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k}}_{somme\ télescopique} = \sqrt{n+1}-\sqrt{1} = \sqrt{n+1}-1$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}}_{somme\ télescopique} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \underbrace{=}_{car\ \frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}} 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}_{somme\ télescopique} = 2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$.

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \sqrt{1+\frac{(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{1+\frac{2k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{1+\frac{2k(k+1)+1}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{1+\frac{2}{k(k+1)}+\frac{1}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)^2} = 1+\frac{1}{k(k+1)}$.

Donc, $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = n+1-\frac{1}{n+1}$.

Ex 10 « Sommes rationnelles »

1. Déterminer trois réels A , $B\ et\ C$ tels que :$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,2\}$, $\frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3} = \frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k-2}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3}$.
2. Déterminer deux réels $a\ et\ b$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{4x^4+1} = \frac{a}{2x^2+2x+1}+\frac{b}{2x^2-2x+1}$. En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $F(x) = \frac{5x+8}{16x+8x^2-8x^3} = \frac{5x+8}{8x(2+x-x^2)} = \frac{5x+8}{-8x(x+1)(x-2))}$.

Le cours assurera qu' il existe A , $B\ et\ C\ réels\ tels\ que\ \forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, F(x) = \frac{5x+8}{-8x(x+1)(x-2))} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, xF(x) = \frac{5x+8}{-8(x+1)(x-2))} = A+\frac{Bx}{x+1}+\frac{Cx}{x-2}$. Donc, $\lim_{x\to 0} xF(x) = \frac{8}{(-8)\times(-2)} = A. Ainsi, A = \frac{1}{2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, (x+1)F(x) = \frac{5x+8}{-8x(x-2))} = A\frac{x+1}{x}+B+\frac{C(x+1)}{x-2}$. Donc, $\lim_{x\to -1}(x+1)F(x) = \frac{-5+8}{8\times(-3)} = B. Ainsi, B = \frac{-1}{8}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, (x-2)F(x) = \frac{5x+8}{-8x(x+1)} = A\frac{x-2}{x}+B\frac{x-2}{x+1}+C$. Donc, $\lim_{x\to 2}(x-2)F(x) = \frac{10+8}{-16\times(3)} = C. Ainsi, C = \frac{-3}{8}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, F(x) = \frac{5x+8}{-8x(x+1)(x-2))} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{x+1}+\left(-\frac{3}{8}\right)\frac{1}{x-2}$.

Alors $\sum_{k=3}^{n} \frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3} = \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k}+\left(-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{k+1}+\left(-\frac{3}{8}\right)\frac{1}{k-2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2}\right)$

$= \left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\sum_{k=4}^{n+1}\frac{1}{k}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right)$.

$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}\right)}_{=0}\left(\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = -\frac{-25}{48}+\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3} = \left(-\frac{25}{8}\right)$.

Ex 11 Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{1-p}\left((n+1)u_n - 1\right)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \to +\infty$.

Ex 12 1) Montrer que pour tous entiers naturels $k\ et\ n$ supérieurs à 1, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}, k\binom{n}{k}$.

2) Montrer que$\forall(k,n) \in (\mathbb{N}\backslash\{0,1\})^2$ $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. En déduire $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}$

3)$Soit\ (n,p,i) \in \mathbb{N}^3 tel\ que\ k \leq i \leq n$. Montrer que $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$. En déduire $S_n = \sum_{0\leq k\leq i\leq n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}$.

Ex 13 Soit a un réel et $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} ka^k$.

1) Exprimer aS_n en fonction de S_{n+1} et d'une somme géométrique.
2) En déduire S_n .

1) $aS_n = a\sum_{k=0}^{n} ka^k = \sum_{k=0}^{n} ka^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(j-1)a^j = \sum_{k=1}^{n+1} ja^j - \sum_{k=1}^{n+1} a^j = \sum_{k=0}^{n+1} ja^j - \sum_{k=1}^{n+1} a^j = S_{n+1} - \frac{a^{n+1}-1}{a-1}a$.

2) De plus, $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} ka^k = \sum_{k=0}^{n} ka^k + (n+1)a^{n+1} = S_n + (n+1)a^{n+1}$.Donc $aS_n = S_n + (n+1)a^{n+1} - \frac{a^{n+1}-1}{a-1}a$. Et par suite ,

$$(a-1)S_n=(n+1)a^{n+1}-\frac{a^{n+1}-1}{a-1}a.$$

Donc si $a\neq 1$ alors $S_n=\frac{1}{a-1}\left[(n+1)a^{n+1}-\frac{a^{n+1}-1}{a-1}a\right]=\frac{1}{a-1}\left[\frac{(n+1)a^{n+2}-(n+1)a^{n+1}-a^{n+2}+a}{a-1}\right].$

Ainsi, si $a\neq 1$ alors $S_n=\left[\frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}\right].$

Par contre *si* $a=1$ alors $S_n=\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

Ex 14 Calcul des sommes $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k$ *et* $\sum_{k=0}^{n}k\,x^k$ par dérivation

En bleuté : des méthodes à connaitre.

1. On pose $f(x)=(1+x)^n$. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Donner une autre expression de $f(x)$.

b. En déduire deux expressions de $f'(x)$.

c. En déduire $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k$ puis retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ déterminer à l'ex 12.

d. Calculer $S_n=\sum_{k=0}^{2n}(k-1)\binom{2n}{k}$

2. On pose $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}, f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Donner une autre expression de $f(x)$.

b. En déduire deux expressions de $f'(x)$.

c. En déduire $\sum_{k=0}^{n}k\,x^k$ puis retrouver le résultat trouvé à l'ex 13.

1. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$.

Alors, $\forall x\in\mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k\overset{\substack{car\ le\ terme\\ \text{"k=0" } est\ nul}}{=}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k=x\left(\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}\right)=xf'(x)=nx(1+x)^{n-1}$.

2. $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}, f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}, f'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$.

Alors, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}, \sum_{k=0}^{n}k\,x^k\overset{\substack{car\ le\ terme\\ \text{"k=0" } est\ nul}}{=}\sum_{k=1}^{n}k\,x^k=x(\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k-1})=xf'(x)=x\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$.

Ex 15 Calcul des sommes $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$ par intégration

On pose $f(x)=(1+x)^n$. f est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$.

1. Donner une autre expression de $f(x)$.

2. En déduire deux expressions de la primitive F de f qui s'annule en 0.

3. En déduire $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R}, F(x)=\frac{1}{n+1}[(1+x)^{n+1}-1]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Alors, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=F(1)=\frac{1}{n+1}[(1+1)^{n+1}-1]=\frac{1}{n+1}[2^{n+1}-1]$

Ex 16 On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^k$ et $T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}4^k$ .Calculer S_n+2T_n *puis* S_n-2T_n .En déduire S_n *et* T_n .

$S_n+2T_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^k+2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}4^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}2^{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}2^{2k+1}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{p}2^p=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{p}2^p\,1^{2n-p}=(1+2)^{2n}=3^{2n}=9^n$.

$S_n-2T_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^k-2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}4^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-2)^{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-2)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{p}(-2)^p=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{p}(-2)^p\,1^{2n-p}=$
$(1-2)^{2n}=(-1)^{2n}=1.$

Ainsi, $\begin{cases}S_n+2T_n=9^n\\ S_n-2T_n=1\end{cases}$. Donc, $\begin{cases}2S_n=1+9^n\\ 4T_n=9^n-1\end{cases}$ et finalement, $\begin{cases}S_n=\frac{1}{2}(1+9^n)\\ T_n=\frac{1}{4}(9^n-1)\end{cases}$.

Ex 17 En appliquant une méthode analogue à celle employée pour calculer $\sum_{k=0}^{n}k^3$, calculer $\sum_{k=0}^{n}k^4$.

$\underbrace{\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^5-k^5]}_{somme\ télescopique}=\sum_{k=0}^{n}[1+5k+10k^2+10k^3+5k^4]$. Alors $(n+1)^5-0^5=5\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+10\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k^2}_{=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+10\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k^3}_{=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}+5\sum_{k=0}^{n}k^4+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}1}_{=(n+1)}$. Ainsi,

$\sum_{k=0}^{n}k^4=\frac{1}{5}\left[(n+1)^5-\frac{5n(n+1)}{2}-\frac{5n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{5n^2(n+1)^2}{2}-(n+1)\right]=\frac{(n+1)}{5}\left[(n+1)^4-\frac{5n}{2}-\frac{5}{3}n(2n+1)-\frac{5}{2}n^2(n+1)-1\right]$

$=\frac{(n+1)}{30}[6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n-20n^2-10n-15n^3-15n^2-6]$

$=\frac{(n+1)}{30}[6n^4+9n^3+n^2-n]$

$=\frac{(n+1)n}{30}[6n^3+9n^2+n-1]$.

Ex 18 Calculer les sommes doubles suivantes (n *et* p désignent deux entiers naturels tels que $n\geq 2$ *et* $p\geq 3$)

1. $S_n=\sum_{\substack{0\leq k\leq n-2\\ 1\leq m\leq p-3}}\alpha$

2. $S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)2^{ij}$

3. $S_n=\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2$

4. $S_n=\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)$

5. $S_n=\sum_{1\leq i,j\leq n}2i+3j$

6. $S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i2^j$

7. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$

2. $S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)2^{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)(2^i)^j\right]$;

Soit $i\in[\![1,n]\!]$.$\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)(2^i)^j=(1-2^i)\underbrace{\sum_{j=0}^{n}(2^i)^j}_{\substack{somme\ géomatrique\\ de\ raison\ 2^i}}=(1-2^i)\frac{1-(2^i)^{n+1}}{1-2^i}=1-(2^i)^{n+1}$.

$$Donc, S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)2^{ij}=\sum_{i=1}^{n}[1-(2^i)^{n+1}]=\sum_{i=1}^{n}1-\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2^{n+1})^i}_{\substack{somme\ géomatrique\\ de\ raison\ 2^{n+1}}}=n-\frac{1-(2^{n+1})^{n+1}}{1-2^{n+1}}.$$

4. $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j))$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + i(n-(i+1)+1) = \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = \left(n+\frac{1}{2}\right)i - \frac{i^2}{2}$.

$$Alors,\quad S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)i - \frac{i^2}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6. $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{i}_{a_i}\underbrace{2^j}_{b_j} \overset{\text{théo.du produit de deux sommes}}{=} (\sum_{i=1}^{n} i)(\sum_{j=1}^{n} 2^j) = \frac{n(n+1)}{2}\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = \frac{n(n+1)}{2}(2^{n+1}-1)$.

Ex 19 Soit $\in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_n = \prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij$. En déduire $T_n = \prod_{1\leq i<j\leq n} ij$.

$P_n = \prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} ij$.
Or, pour chaque i , $\prod_{j=1}^{n} ij = i^n\,(\prod_{i=1}^{n} j) = i^n n!$. Donc $P_n = \prod_{i=1}^{n} i^n n! = (n!)^n \prod_{i=1}^{n} i^n = (n!)^n(\prod_{i=1}^{n} i)^n = (n!)^n(n!)^n = (n!)^{2n}$.
$P_n = T_n \times \prod_{1\leq i=j\leq n} ij \times \underbrace{\prod_{1\leq j<i\leq n} ij}_{=T_n \text{ puisque } i \text{ et } j \text{ jouent un rôle symétrique dans l'expression de } T_n} = T_n \times \prod_{i=1}^{n} i^2 \times T_n = T_n^2 \times (\prod_{i=1}^{n} i)^2 = T_n^2(n!)^2$. Donc, $T_n^2 = \frac{(n!)^{2n}}{(n!)^2} = \left(\frac{(n!)^n}{n!}\right)^2 = ((n!)^{n-1})^2$. Alors comme $T_n > 0$, je peux conclure que $T_n = (n!)^{n-1}$.

III D'autres applications de la « FBN »

Ex 20

1. Soit a, b, c, d des entiers. Justifier que : $\left(a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}\right)$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists!\,(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2/\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
3. Trouver une relation entre $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$.En déduire que les suites (a_n) *et* (b_n)sont strictement croissantes.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = 1$.
5. En déduire que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de couples d'entiers naturels (x, y) solutions.

1. Supposons que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Alors, $a - c \underbrace{=}_{**} \sqrt{2}(d-b)$.
   Imaginons un instant que $d - b \neq 0$. Alors, $\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b}$. Comme a, b, c et d sont des entiers, $\frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$, autrement dit, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux. L'hypothèse "$d - b \neq 0$" est fausse et j'en conclus que $d = b$. Et en remplaçant dans $**$, j'obtiens $a - c = 0$ i.e. $a = c$.
3. Posons $H(n)$ la propriété : $\exists(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2/\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
   Init : $\left(3+2\sqrt{2}\right)^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$. Donc $a_0 = 1$ *et* $b_0 = 0$ conviennent.
   Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 tq \left(3+2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
   $$\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^n\left(3+2\sqrt{2}\right) = \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) = 3a_n + 4b_n + \sqrt{2}(2a_n + 3b_n).$$
   Posons $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ *et* $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. Comme a_n *et* b_n sont entiers natuerels, a_{n+1} *et* b_{n+1}sont aussi entiers naturels.
   CCL : $\forall n, \exists(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2/\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
   D'après 1. , l'écriture de $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$*sous la forme* $a_n + b_n\sqrt{2}$ tq $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$est unique.
4. $\forall n, a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ *et* $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. De plus, $\left(3+2\sqrt{2}\right)^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$ .Donc, $a_0 = 1$ *et* $b_0 = 0$. Alors on montre facilement par récurrence sur n que $\forall n, a_n > 0$ *et* $b_n \geq 0$. Alors, $\forall n, a_{n+1} - a_n = 2a_n + 4b_n > 0$ *et* $b_{n+1} - b_n = 2a_n + 2b_n > 0$. Donc, les suites (a_n) *et* (b_n)sont strictement croissantes.
5. Posons $u_n = a_n^2 - 2b_n^2$. Montrons que la suite (u_n) est constante égale à 1.
   $\forall n, u_{n+1} = a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (3a_n + 4b_n\ )^2 - 2(2a_n + 3b_n\ )^2 = a_n^2 - 2b_n^2 = u_n$. Donc la suite (u_n) est constante. De plus, $u_0 = a_0^2 - 2b_0^2 = 1$. J'en déduis que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = 1$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ avec $a_n$et b_n entiers naturels. Donc pour tout entier naturel n, (a_n, b_n)est solution entière de $x^2 - 2y^2 = 1$ .Comme les suites (a_n) *et* (b_n) sont strictement croissantes, toutes les valeurs a_n sont distinctes et par conséquent, tous les couples (a_n, b_n) sont distincts…. Ainsi, l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions entières.

Ex 21 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n > n$.

IV Suites particulières

Ex 22 Donner une expression explicite des suites récurrentes définies de la manière suivante :

1. $\begin{cases} \forall n, u_{n+1} = 3 + u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \forall n, u_{n-1} = -4u_n \\ u_1 = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \forall n, u_{n+1} = 1 - 3u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \forall n, u_{n+1} = 2u_{n-1} \\ u_1 = 2, u_2 = 1 \end{cases}$
5. $\forall n, \prod_{k=0}^{n} u_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2+n}$
6. $u_0 = 1$ *et* $\forall n, u_{n+1} = u_n + n^2 - 3^{n+1/2}$.
7. $u_0 = 1$ *et* $\forall n, u_{n+1} = (n+1)e^n u_n$.
8. $u_0 = 2$ *et* $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+3)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

Ex 23

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=5u_n+4v_n \ \ et \ \ v_{n+1}=4u_n+5v_n\\ u_0=2\,, v_0=1\end{cases}$. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire des expressions explicites de u_n et de v_n.

2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\begin{cases}\forall n, u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n} \ \ et \ \ v_n=\frac{1}{1+u_n}\\ u_0=0\end{cases}$

a. Justifier que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n$ et v_n existent .

b. Montrer que (v_n) est arithmétique. En déduire une expression explicite de u_n.

3. Soit (u_n) une suite vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=\frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n)$. Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire une expression de u_n en fonction de n et de u_0 et u_1 .

2.*a*. Montrer par récurrence sur n que $\forall n\in\mathbb{N} \ \ , u_n \ existe \ et \ u_n\in]-1,0]$.

Initialisation : $u_0\in]-1,0]$.

Propagation : $Soit\ n\in\mathbb{N}$. Je suppose que u_n existe et $u_n\in]-1,0]$. Alors $2+u_n\in]1,2]$. Donc, $\frac{1}{2+u_n}$ existe et $\frac{1}{2+u_n}\in[\frac{1}{2},1[$. Donc u_{n+1} existe $u_{n+1}=-\frac{1}{2+u_n}\in]-1,-\frac{1}{2}]$. Donc $u_{n+1}\in]-1,0]$.

CCL : $\forall n\in\mathbb{N} \ \ , u_n \ existe\ et\ u_n\in]-1,0]$. Par suite, $\forall n\in\mathbb{N} \ \ , u_n \ \neq -1 \ donc \ v_n \ existe.$

$b.$ $\ v_{n+1}=\frac{1}{1+u_{n+1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2+u_n}}=\frac{2+u_n}{2+u_n-1}=\frac{2+u_n}{1+u_n}=\frac{1+(1+u_n)}{1+u_n}=\frac{1}{1+u_n}+1=v_n+1$. Alors, (v_n) est arithmétique de raison 1. Par suite , $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=v_0+n=1+n$.

Alors, $\frac{1}{1+u_n}=1+n$ donc $1+u_n=\frac{1}{1+n}$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N} \ \ , u_n=\frac{1}{1+n}-1=\frac{n}{1+n}$.

Ex 24 Soit u et v les suites définies par : $\begin{cases}u_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{2u_n+4}\end{cases}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\frac{2u_n-1}{u_n+1}$.

1. Montrer que les suites u et v sont bien définies.

2. Montrer que v est géométrique.

3. En déduire une expression explicite de u_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Ex 25 Soit u la suite définie par : $\begin{cases}u_0=0\\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=2u_n+3^n.\end{cases}$

1. Montrer que la suite v définie par : $v_n=\frac{u_n}{3^n}$ est arithmético-géométrique.

2. En déduire une expression explicite de u_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

V Systèmes linéaires

Ex 26 Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues réelles $x_1, x_2, \dots, x_n, x,\ y,\ z$ et/ou t et de paramètres réels a, b, c, m, p, q et/ou λ.

1. $\begin{cases}2x-3y=1\\ 2x+3y=-3\end{cases}$
2. $\begin{cases}3x-6y=-3\\ 2x-4y=2\end{cases}$
3. $\begin{cases}3x+5y=2\\ 2x+4y=a\end{cases}$
4. $\begin{cases}x+y=m^2-3\\ 2x+2y=-m\end{cases}$
5. $\begin{cases}mx+y=m+1\\ -2x-my=m\end{cases}$
6. $\begin{cases}2x+4y-5z=-8\\ 3x+9y-8z=1\\ 4x+17y-11z=41\end{cases}$
7. $\begin{cases}5x+y+2z=1\\ x+3y+z=6\\ x+2y-7z=-1\\ 2x-2y+3z=5\\ -x+3y-z=0\end{cases}$
8. $\begin{cases}5x-z=-4\\ 2x-y-z=-3\\ 8x+3y+5z=-1\\ 6x+y+z=-3\end{cases}$
9. $\begin{cases}mx+y+(m-1)z=3\\ (m-1)x+y+(m-1)z=9\\ x+y+z=0\end{cases}$
10. $\begin{cases}x-my+m^2z=m\\ mx-m^2y+mz=1\\ mx+y-m^3z=-1\end{cases}$
11. $\begin{cases}ax+by+z=1\\ x+aby+z=1\\ x+by+az=1\end{cases}$
12. $\begin{cases}x+y+z=0\\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0\\ bcx+acy+abz=0\end{cases}$
13. $\begin{cases}4x+y+z=\lambda x\\ x+4y+z=\lambda y\\ x+y+4z=\lambda z\end{cases}$
14. $\begin{cases}x+y+z-4t=-1\\ 2x-3y-8z+7t=8\\ x+3y+5z-10t=-5\\ 4x-y-6z-t=6\end{cases}$
15. $\begin{cases}-3x+2y+2z=\lambda x\\ -2x+y+2z=\lambda y\\ -2x-2y+z=\lambda z\\ -2x-2y+t=\lambda t\end{cases}$
16. Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$.

$$(S) : \begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_1+x_2+x_3=0\\ x_2+x_3+x_4=0\\ \vdots\\ x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=0\\ x_{n-1}+x_n=0\end{cases}$$

distinguer les cas :
$n=3p, n=3p+1 \ et \ n=3p+2.$

J'essaie de faire apparaitre un coefficient égal à 1 puis j'utilise **uniquement** cette ligne (que l'on aura passé en L_1) pour faire disparaitre l'inconnue correspondante sur les **autres** lignes en effectuant des opérations de la forme $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_1$.

Je vérifie chaque équivalence en écrivant les opérations dans les deux sens et en m'assurant que je ne divise pas par un réel qui pourrait être nul (quand il dépend d'un

Ex 27 1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$, déterminer les points d'intersection :

a. entre l'hyperbole d'équation $xy=2$ et la droite passant par $A(3,4)$ et dirigée par $\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

b. entre les droites d'équation $2x-3y=2$ et $7x-2y=1$.

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer les points d'intersection des plans d'équation :
$4x-3y+5z=2$ et $7x-2y+3z=1$.

Ex 28 Résoudre $(S):\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$. **Indication** : appliquer une bonne fonction qui permet de se ramener à un système linéaire.

Ex 29 Soit $a\ b, c, d$ des réels .

1. On suppose ici que $c \neq 0$. Montrer qu'il existe deux réels $U\ et\ V$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}, \frac{ax+b}{cx+d} = U + \frac{V}{cx+d}$. En déduire une primitive de $f:\left(x \mapsto \frac{1-2x}{3x+5}\right)$.
2. On suppose ici que $c \neq d$. Montrer qu'il existe deux réels $U\ et\ V$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{c, d\}, \frac{ax+b}{(x-d)(x-c)} = \frac{U}{x-c} + \frac{V}{x-d}$. En déduire la somme $S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2+k}$.