

PROGRAMME DE COLLE SEMAINE 2

CHAPITRE 0 : Langage mathématiques-Raisonnements-Sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

I. Notation

- Notations et vocabulaire ensemblistes : $\in, \cup, \cap, \subset, \{\dots\}$.
- Quantificateurs : $\forall, \exists, \exists!$
- Proposition et sa négation
- Implication, sa contraposée et sa réciproque.
- Equivalence.

II. Sous -ensemble remarquable de $\mathbb{R}$

- **Définition de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.**
- **Calculs dans $\mathbb{Z}$** : multiple, diviseur, pair, impair, *PPCM* et *PGCD*.
- **Calculs dans $\mathbb{Q}$** : représentant irréductible, somme, produit et quotient.
- **Calculs dans $\mathbb{R}$** : $\sqrt{2}$ est irrationnel, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnel, le produit d'un irrationnel et d'un rationnel non nul est irrationnel.

III. Raisonnements

- Démonstration par disjonction de cas
- Démonstration par l'absurde
- Démonstration par contraposée
- Démonstration par double implication
- Démonstration par équivalence
- Démonstration par récurrence : Théorème de récurrence Simple – Double – Forte .

CHAPITRE 1 : Sommes et Produits finis-Suites particulières-Systèmes linéaires simples.

I. Sommes et produits finis

- Sommes et produits finies
 - Notation d'une somme finie et d'un produit fini.
 - Propriétés: découpage, séparation, mise en facteur.
 - Changement d'indices.
 - Ecriture de u_n en fonction de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et S_{n-1} OU en fonction de $P_n = \prod_{k=0}^n u_k$ et P_{n-1} .
 - Somme télescopique $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)$ et plus généralement, $\sum_{k=p}^n (u_k - u_{k+1})$. Produit télescopique $\prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k}$.
- Sommes doubles
 - Notation d'une somme double et finie.
 - Théorème d'interversion de deux sommes finies.
 - Produit de deux sommes simples et finies.

II. Formules sommatoires

- Somme
 - des entiers compris entre 1 et n
 - de ces mêmes « entiers au carré »
- Somme géométrique.
 - Factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$
 - Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
 - Formules des sommes géométriques : $\sum_{k=0}^n x^k$ et $\sum_{k=p}^n x^k$.
- Formule du binôme de Newton
 - Définition d'une factorielle, d'un coefficient binomial.
 - Propriétés des factorielles et des coefficients binomiaux. Valeurs particulières.
 - Formule de Pascal. Triangle de pascal.
 - Formule du binôme de Newton.
- Application à quelques suites particulières : expression explicite et sommes des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique, géométrique ou arithmético-géométrique.

III. Systèmes linéaires

- Méthode de résolution d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues par OPERATIONS les lignes.
- Opération élémentaire, système échelonné.
- Méthode de résolution d'un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues et d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues

CHAPITRE 2 : Inégalités et premières fonctions réelles.

I Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.

- Règles de calcul sur les inégalités dans $\mathbb{R}$. Extension aux $\sum$ et $\prod$.
- Somme nulle de réels positifs.
- Règles de calcul dans $\mathbb{R}$. Formes indéterminées.

II Fonctions polynomiales réelles.

- Fonction polynomiale de degré 2.
 - Factorisation dans $\mathbb{R}$, racine(s) réelle(s) et signe. Allure de la courbe.
 - Somme et produit des racines réelles.
 - Résolution d'un système NON linéaire de la forme $\begin{cases} x + y = \alpha \\ xy = \beta \end{cases}$.
 - Méthodes de factorisation
- Fonction polynomiale de degré n
 - Définition (forme développée), coefficients, degré, racines
 - Théorème de division euclidienne
 - Théorème de factorisation connaissant une racine.

III Valeur absolue

- Définition de la valeur absolue d'un réel.
 - Tracé de la fonction valeur absolue.
 - Règles de calcul sur les valeurs absolues.
 - Inégalités triangulaires

IV Racine carrée et racine nième.

- Définition de la racine carrée d'un réel positif.
 - Règles de calcul sur les racines carrées.
 - Inégalités classiques : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
 - Croissance, dérivabilité et tracé de la fonction racine carrée.
 - Quantité conjuguée d'une expression de la forme $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (ou $A - \sqrt{b}$).
- Définition de la racine n ième d'un réel positif. Extension à la racine n ième d'un réel négatif lorsque n est impair.

V Partie entière

- Définition de la partie entière d'un réel.
- Caractérisation par $p = [X] \Leftrightarrow \begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ p \leq X < p + 1 \end{cases}$.
- Croissance et tracé de la fonction partie entière.
- Règles de calcul :
 - Si $n \in \mathbb{Z}$ alors $[n] = n$
 - Si $n \in \mathbb{Z}$ alors pour tout réel X , $(n \leq X \Rightarrow x \leq [X])$ et $(n > X \Rightarrow x \geq [X] + 1)$
 - Si $n \in \mathbb{Z}$ alors pour tout réel X , $[X + n] = [X] + n$.

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus. Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaître :

- 1) Énoncer et démontrer les formules donnant $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k^2$.
- 2) Énoncer et démontrer la formule de factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$ et celle des sommes géométriques $\sum_{k=0}^n x^k$ et $(\sum_{k=p}^n x^k)$.
- 3) Énoncer et démontrer la formule de Pascal.
- 4) Énoncer et démontrer le théorème de résolution de $\begin{cases} x + y = \alpha \\ xy = \beta \end{cases}$.
- 5) Énoncer et démontrer les deux inégalités triangulaires.
- 6) Énoncer et démontrer que Si $n \in \mathbb{Z}$ et $X \in \mathbb{R}$, alors $[X + n] = [X] + n$

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer