DS 1

CALCULATRICE NON AUTORISEE. DUREE 3 HEURES.

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les différents exercices sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :

- Bien lire tout le sujet avant de commencer.
- Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
- Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :

•Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire.

•Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …) sont utilisés et utilisés à bon escient.

•La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé, n'hésitez pas à en faire part au professeur surveillant.

Exercice 1 : Autour de la formule de binôme de Newton.

Soit n un entier naturel non nul.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 2^k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^k$

$X_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 4^k$et $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 4^k$.

1. Calculer S_n et T_n.
2. Compléter : $X_n = \sum_{\substack{0\le j\le 2n \\ et\ j\ pair}} \binom{2n}{j} \ldots\ldots.$ et $Y_n = \sum_{\substack{0\le j\le 2n \\ et\ j\ impair}} \binom{2n}{j} \ldots\ldots$
3. Exprimer $X_n + 2Y_n$ en fonction de S_n.
4. Exprimer $X_n - 2Y_n$ en fonction de T_n.
5. En déduire X_n et Y_n .

Exercice 2 : Somme des entiers puissance p.

On pose pour tous entiers naturels n et p, $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Rappeler les valeurs de $S_n(0), S_n(1)$ et $S_n(2)$.
   b. Déterminer la valeur de $S_n(3)$ en calculant de deux manières $\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^4 - k^4]$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que $(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} k^j$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux manières $U_n = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^{p+1} - k^{p+1}]$, montrer que :

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_n(j) \quad .$$

4. En déduire $S_n(4)$ en fonction de $S_n(0)$, $S_n(1)$, $S_n(2)$ et $S_n(3)$.

Problème : quatre méthodes pour calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k$.

1. Calculer S_n pour $a = 1$ *puis* $a = 0$.

Désormais $a \neq 1$ *et* $a \neq 0$.

Partie 1 : Calcul de S_n grâce à un système linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Justifier que $S_{n+1} = \left(\sum_{j=1}^{n}(j+1)a^{j+1}\right) + a$.
3. En déduire que $S_{n+1} = aS_n + \frac{a^{n+2}-a}{a-1}$.
4. En déterminant une autre relation entre S_{n+1} et S_n, donner une nouvelle expression (sans $\sum$) de S_n.

Partie 2 : Calcul de S_n par dérivation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$et notons f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

5. Donner une autre expression de $f(x)$ et en déduire deux expressions de $f'(x)$.
6. Exprimer S_n en fonction de f' *et* a et retrouver l' expression de S_n obtenue au 4.

Partie 3 : Calcul de S_n par télescopage

7. Déterminer les réels A et B de sorte que la suite (u_n) telle que : $\forall n, u_n = (An+B)a^n$ (où A et B sont des réels indépendants de n) vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = ka^k$.
8. Retrouver alors l'expression de S_n obtenue aux questions 4. et 6.

Partie 4 : Calcul grâce au théorème d'Abel (que l'on va démontrer !!)

Soit (u_n) , (U_n) , (v_n) *et* (V_n) des suites réelles telles que : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *et* $v_n = V_{n+1} - V_n$.

9. Soit un entier naturel n. Exprimer u_{n+1} en fonction de U_{n+1} *et* U_n .
10. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} u_k V_k = U_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} v_k U_k$ (théorème d'Abel).
11. Retrouver alors l'expression de S_n obtenue aux questions 4. et 6. et 8.

.Fin.