Corrigé du DS 1

Exercice 1 : Autour de la formule de binôme de Newton.

Soit n un entier naturel non nul.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 2^k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^k$

$X_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 4^k$ et $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 4^k$.

1. Calculer S_n et T_n.
2. Compléter : $X_n = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ pair}} \binom{2n}{j} \ldots\ldots$ et $Y_n = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ impair}} \binom{2n}{j} \ldots\ldots$
3. Exprimer $X_n + 2Y_n$ en fonction de S_n.
4. Exprimer $X_n - 2Y_n$ en fonction de T_n.
5. En déduire X_n et Y_n.

1. $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 2^k 1^{2n-k} = (2+1)^{2n} = 3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$

et $T_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k 1^{2n-k} = (-2+1)^{2n} = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1.$

2. $X_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 4^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 2^{2k} = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ pair}} \binom{2n}{j} 2^j.$

$$\text{et} \quad Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 2^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \left(\frac{1}{2}\right) 2^{2k+1} = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ impair}} \binom{2n}{j} \times \frac{1}{2} \times 2^j .$$

3. $X_n + 2Y_n = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ pair}} \binom{2n}{j} 2^j + 2 \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ impair}} \binom{2n}{j} \times \frac{1}{2} \times 2^j = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ pair}} \binom{2n}{j} 2^j + \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ impair}} \binom{2n}{j} 2^j = S_n$

$X_n - 2Y_n = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ pair}} \binom{2n}{j} 2^j - 2 \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ et\ j\ impair}} \binom{2n}{j} \times \frac{1}{2} \times 2^j = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ j\ pair}} \binom{2n}{j} 2^j - \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ j\ impair}} \binom{2n}{j} 2^j$

$X_n - 2Y_n = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ j\ pair}} \binom{2n}{j} (-2)^j + \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ j\ impair}} \binom{2n}{j} (-2)^j = T_n.$

4. $\begin{cases} X_n + 2Y_n = 9^n \\ X_n - 2Y_n = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2X_n = 1 + 9^n \\ 4Y_n = 9^n - 1 \end{cases}$. Ainsi, $\begin{cases} X_n = \frac{1}{2}(1 + 9^n) \\ Y_n = \frac{1}{4}(9^n - 1) \end{cases}$.

Exercice 2 : Somme des entiers puissance p.

On pose pour tous entiers naturels n et p, $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. Rappeler la valeur de $S_n(0), S_n(1)$ et $S_n(2)$.
2. Déterminer $S_n(3)$ en calculant de deux manières $\sum_{k=0}^{n} [(k+1)^4 - k^4]$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que $(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} k^j$.
4. En calculant de deux manières $U_n = \sum_{k=0}^{n} [(k+1)^{p+1} - k^{p+1}]$, montrer que :
$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_n(j) .$$
5. En déduire $S_n(4)$ en fonction de $S_n(0)$, $S_n(1)$, $S_n(2)$ et $S_n(3)$.

1. $S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$, $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $S_n(2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. .

2. D'une part, $\sum_{k=0}^{n}\left[\underbrace{(k+1)^4}_{=u_{k+1}}-\underbrace{k^4}_{=u_k}\right] \overset{\substack{somme \\ télescopique}}{\triangleq} (n+1)^4-0^4=(n+1)^4$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^4-k^4]=\sum_{k=0}^{n}[k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4]=\sum_{k=0}^{n}[4k^3+6k^2+4k+1]$

$=4\sum_{k=0}^{n}k^3+6\sum_{k=0}^{n}k^2+4\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1=4S_n(3)+6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.

Donc, $(n+1)^4=4S_n(3)+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+(n+1)$.

Alors, $S_n(3)=\frac{1}{4}[\,(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)]$

$S_n(3)=\frac{1}{4}(n+1)[\,(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1]=\frac{1}{4}(n+1)[\,(n+1)^3-(n+1)(2n+1)]$

$S_n(3)=\frac{1}{4}(n+1)^2[\,(n+1)^2-(2n+1)]=\frac{1}{4}(n+1)^2[\,n^2]=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. Soit $k\in\mathbb{N}$. $(k+1)^{p+1}-k^{p+1}=\sum_{j=0}^{p+1}\binom{p+1}{j}k^j1^{p+1-j}-k^{p+1}=\sum_{j=0}^{p+1}\binom{p+1}{j}k^j-k^{p+1}=\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}k^j$.

4. D'une part , $U_n=\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^{p+1}-k^{p+1}]=(n+1)^{p+1}-0^{p+1}=(n+1)^{p+1}$.

D'autre part, $U_n=\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^{p+1}-k^{p+1}]=\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}k^j\right]=\sum_{j=0}^{p}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{p+1}{j}k^j\right]=$

$\sum_{j=0}^{p}\left[\binom{p+1}{j}\sum_{k=0}^{n}k^j\right]\sum_{j=0}^{p}\left[\binom{p+1}{j}S_n(j)\right]=\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}S_n(j)$.

Ainsi, $(n+1)^{p+1}=\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}S_n(j)$.

5. Prenons $p=4$. $(n+1)^5=\sum_{j=0}^{4}\binom{5}{j}S_n(j)=\binom{5}{0}S_n(0)+\binom{5}{1}S_n(1)+\binom{5}{2}S_n(2)+\binom{5}{3}S_n(3)+\binom{5}{4}S_n(4)$.

Donc, $S_n(4)=\frac{1}{5}[(n+1)^5-S_n(0)-5S_n(1)-10S_n(2)-10S_n(3)]$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Problème : quatre méthodes pour calculer $S_n=\sum_{k=1}^{n}ka^k$.

Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}ka^k$.

1. Calculer S_n pour $a=1\ puis\ a=0$.

Désormais $a\neq 1\ et\ a\neq 0$.

Partie 1 : Calcul de $S_n(a)$ grâce à un système linéaire

Fixons $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Justifier que $S_{n+1}=\left(\sum_{j=1}^{n}(j+1)a^{j+1}\right)+a$.
3. En déduire que $S_{n+1}=aS_n+\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$.
4. En déterminant une autre relation entre S_{n+1} et S_n, donner une nouvelle expression (sans $\sum$) de S_n.

1. $Si\ a=1\ alors\ S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\ et\ Si\ a=0\ alors\ S_n=\sum_{k=1}^{n}0=0$.

2. $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}ka^k \underset{\substack{k=j+1\\ j=k-1\\ k\in[\![1,n+1]\!]\Leftrightarrow j\in[\![0,n]\!]}}{=} \left(\sum_{j=0}^{n}(j+1)a^{j+1}\right)=\sum_{j=1}^{n}(j+1)a^{j+1}+a$.

3. $S_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}(j+1)a^{j+1}+a=\sum_{j=1}^{n}\left(ja^{j+1}+a^{j+1}\right)+a=\sum_{j=1}^{n}ja^{j+1}+\sum_{j=1}^{n}a^{j+1}+a$

$$=\sum_{j=1}^{n}ja^j\times a+\sum_{j=1}^{n}a^j\times a+a=a\sum_{j=1}^{n}ja^j+a\sum_{j=1}^{n}a^j+a=aS_n+a^2\frac{a^n-1}{a-1}+a=aS_n+\frac{a^{n+2}-a^2+a^2-a}{a-1}.$$

$$Ainsi, S_{n+1}=aS_n+\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$$

4. $S_{n+1}=aS_n+\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$. De plus, $S_{n+1}=S_n+(n+1)a^{n+1}$.

Donc, $aS_n+\frac{a^{n+2}-a}{a-1}=S_n+(n+1)a^{n+1}$. Alors, $(a-1)S_n=(n+1)a^{n+1}-\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$. Et ainsi,

$$S_n=\frac{1}{(a-1)}\left[(n+1)a^{n+1}-\frac{a^{n+2}-a}{a-1}\right]=\frac{1}{(a-1)^2}[(n+1)a^{n+1}(a-1)-(a^{n+2}-a)]$$

$$S_n=\frac{1}{(a-1)^2}[na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a].$$

Partie 2 : Calcul de $S_n(a)$ par dérivation

Fixons $n\in\mathbb{N}^*$et notons f la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\},\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

5. Donner une autre expression de $f(x)$ et en déduire deux expressions de $f'(x)$.
6. Exprimer S_n en fonction de f' et a et retrouver l' expression de S_n obtenue au 4.

5. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$.
6. Alors, $S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k = a(\sum_{k=1}^{n} k\,a^{k-1}) \underbrace{=}_{car\ a\neq 1} af'(a) = a\frac{(n+1)a^n(a-1)-(a^{n+1}-1)}{(a-1)^2} = \frac{na^{n+1}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}$.

Partie 3 : Calcul de $S_n(a)$ par télescopage

7. Déterminer les réels A et B de sorte que la suite (u_n) telle que : $\forall n, u_n = (An+B)a^n$ (où A et B sont des réels indépendants de n) vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = ka^k$.
8. Retrouver alors l'expression de S_n obtenue aux questions 4. et 6.)

7. $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = ka^k \Longrightarrow \begin{cases}(A\times 1+B)a^1 - (A\times 0+B)a^0 = 0\ (pour\ k=0)\\ (A\times 2+B)a^2 - (A\times 1+B)a^1 = a\ (pour\ k=1)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aA + (a-1)B = 0 \\ (2a-1)A + (a-1)B = 1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} aA + (a-1)B = 0 \\ (a-1)A = 1\ \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{a}{a-1}A = -\frac{a}{(a-1)^2} \\ A = \frac{1}{a-1}\end{cases}.$$

Donc pour qu'une suite de la forme $u_n = (An+B)a^n$, vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = ka^k$, il faut que $\begin{cases} B = -\frac{a}{(a-1)^2} \\ A = \frac{1}{a-1}\end{cases}$.

Posons $\forall n, u_n = \left(\frac{1}{a-1}n - \frac{a}{(a-1)^2}\right)a^n$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = \left(\frac{1}{a-1}(k+1) - \frac{a}{(a-1)^2}\right)a^{k+1} - \left(\frac{1}{a-1}k - \frac{a}{(a-1)^2}\right)a^k = a^k\left[\frac{a}{a-1}(k+1) - \frac{a^2}{(a-1)^2} - \frac{1}{a-1}k + \frac{a}{(a-1)^2}\right]$

$= a^k\left[k + \left(\frac{a}{a-1} - \frac{a^2}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2}\right)\right] = a^k\left[k + \left(\frac{a(a-1)-a^2+a}{(a-1)^2}\right)\right] = ka^k$. Donc $\begin{cases} B = -\frac{a}{(a-1)^2} \\ A = \frac{1}{a-1}\end{cases}$ conviennent.

8. $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = ka^k$. Donc $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=0}^{n} ka^k = \sum_{k=1}^{n} ka^k = S_n$.

Alors par télescopage, $S_n = u_{n+1} - u_0 = \left(\frac{1}{a-1}(n+1) - \frac{a}{(a-1)^2}\right)a^{n+1} - \left(-\frac{a}{(a-1)^2}\right) = \left(\frac{(n+1)(a-1)-a}{(a-1)^2}\right)a^{n+1} + \frac{a}{(a-1)^2}$

$S_n = \left(\frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}}{(a-1)^2}\right) - \frac{a}{(a-1)^2} = \frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}-a}{(a-1)^2}$.

Partie 4 : Calcul grâce au théorème d'Abel (que l'on va démontrer !!).

Soit (u_n) , (U_n) , $(v_n) et\ (V_n)$ des suites réelles telles que : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\ \ et\ v_n = V_{n+1} - V_n$.

9. Soit un entier naturel n. Exprimer u_{n+1} en fonction de $U_{n+1}\ et\ U_n$.
10. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} u_kV_k = U_nV_n - \sum_{k=0}^{n-1} v_kU_k$ (théorème d'Abel).
11. Retrouver alors l'expression de S_n obtenue aux questions 4. et 6. et 8.

9. $\forall n,\ u_{n+1} = U_{n+1} - U_n$.
10. Posons $H(n)$: " $\sum_{k=0}^{n} u_kV_k = U_nV_n - \sum_{k=0}^{n-1} v_kU_k$ "
Initialisation : $\sum_{k=0}^{1} u_kV_k = u_0V_0 + u_1V_1$
et $U_1V_1 - \sum_{k=0}^{0} v_kU_k = U_1V_1 - v_0U_0 = U_1V_1 - (V_1 - V_0)U_0 = \underbrace{(U_1 - U_0)}_{u_1}V_1 + V_0\underbrace{U_0}_{u_0} = u_1V_1 + V_0u_0$.
Donc, $\sum_{k=0}^{1} u_kV_k = U_1V_1 - \sum_{k=0}^{0} v_kU_k$. Et $H(0)$ est vraie.
Propagation : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $H(n)$ est vraie. Sous cette hypothèse, montrons $H(n+1)$.

$$U_{n+1}V_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} v_kU_k =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_kV_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_kV_k\right) + u_{n+1}V_{n+1} = U_nV_n - \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_kU_k\right) + u_{n+1}V_{n+1} = U_nV_n - \left(\sum_{k=0}^{n} v_kU_k\right) + u_{n+1}V_{n+1} + v_nU_n$$

$$= (U_{n+1} - u_{n+1})(V_{n+1} - v_n) - \left(\sum_{k=0}^{n} v_kU_k\right) + u_{n+1}V_{n+1} + v_n(U_{n+1} - u_{n+1})$$

$$= U_{n+1}V_{n+1} - \left(\sum_{k=0}^{n} v_k U_k\right)$$

$Donc\ H(n) \Longrightarrow H(n+1)$.

CCL : le théorème de récurrence simple permet d'affirmer que :

$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n} u_k V_k = U_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} v_k U_k$.

11. Posons $u_j = a^j$ et $v_j = 1$. Alors , $U_k = \sum_{j=0}^{k} a^j = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}$ et $V_k = \sum_{j=0}^{k-1} 1 = k$.

$\sum_{k=0}^{n} u_k V_k = \sum_{k=0}^{n} a^k k = U_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} v_k U_k$

$= n\frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^{k+1}-1}{a-1} = n\frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^{k+1}-1}{a-1} =$

$= n\frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \frac{a}{a-1}\sum_{k=0}^{n-1} a^k + \frac{1}{a-1}\sum_{k=0}^{n-1} 1$

$= n\frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \frac{a}{a-1}\frac{a^n-1}{a-1} + \frac{1}{a-1}n$

$= n\frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \frac{a}{a-1}\frac{a^n-1}{a-1} + \frac{1}{a-1}n$

$= \frac{n(a^{n+1}-1)(a-1)-a(a^n-1)+n(a-1)}{(a-1)^2}$

$= \frac{na^{n+2}-n(a-1)-na^{n+1}-a^{n+1+a}+n(a-1)}{(a-1)^2}$

$\sum_{k=0}^{n} a^k k = \frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}$.

Fin.