

Programme de colle 4

CHAPITRE 2 : Inégalités et premières fonctions réelles.

VI Trigonométrie

- Définition du sinus et cosinus d'un réel à partir du cercle trigonométrique.
- Premières formules de trigonométrie liées aux définitions de $\cos$, $\sin$.
- Valeurs particulières.
- Equations et inéquations trigonométriques ; définition de $\text{Arccos}(x)$ et de $\text{Arcsin}(x)$ d'un réel $x \in [-1, 1]$.
- Autres formules de trigonométrie : formules d'addition, d'angle double.
- Formules à savoir retrouver : formules de factorisation et de linéarisation.
- Si a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe un réel $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$. Savoir exprimer θ . En fonction de $\text{Arccos}(a)$ ou $\text{Arcsin}(b)$ ou $\text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$.
- Méthode pour écrire $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ sous la forme $C\cos(\omega t + \varphi)$.
- Fonctions sinus et cosinus: parité, périodicité, continuité, dérivabilité, courbe.
- Définition de la tangente d'un réel distinct des valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. Représentation.
- Valeurs particulières.
- Formules de trigonométrie dont formules d'addition, d'angle double.
- Equations et inéquations trigonométriques ; définition de $\text{Arctan}(x)$ d'un réel x .
- Fonction tangente : parité, périodicité, continuité, dérivabilité, courbe.

III Intervalles et parties majorées ou bornée de $\mathbb{R}$

- Définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$. Description des différents intervalles.
- Partie majorée, minorée ou bornée
 - Définition d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majoré, puis minoré, puis borné.
 - Caractérisation d'une partie bornée grâce à la valeur absolue.
 - Définition du plus grand élément (maximum) d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ quand il existe. Idem avec minimum.

CHAPITRE 3 Nombres complexes

I Forme algébrique

- Ensemble $\mathbb{C}$:
 - définition, forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire, imaginaire pur
 - Règles de calculs : égalité de deux complexes, parties réelle et imaginaire d'une somme de nombres complexes.
- Représentation d'un nombre complexe :
 - Définition de l'affixe d'un point, d'un vecteur, images ponctuelle et vectorielle d'un complexe
 - Affixe de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, affixe de $\overrightarrow{MM'}$. Caractérisation par les complexes de deux points symétriques par rapport à O.
- Conjugué d'un nombre complexe :
 - définition et image ponctuelle du conjugué
 - propriétés :
 - ✓ écriture des parties réelle et imaginaire de z à l'aide de z et de son conjugué
 - ✓ caractérisation d'un réel ou d'un imaginaire pur grâce au conjugué.
 - ✓ conjugué d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de nombres complexes
 - ✓ le produit d'un complexe par son conjugué.

II Forme trigonométrique

- Module : 4 définitions équivalentes : par parties réelle et imaginaire - par le conjugué - par une distance - par une norme de vecteur.
- Propriétés du module :
 - module d'un réel
 - comparaison entre $|\text{Re}(z)|$ et $|z|$, entre $|\text{Im}(z)|$ et $|z|$
 - module de l'inverse d'un complexe, d'un produit ou d'un quotient de complexes
 - module de $\frac{z}{|z|}$
 - inégalités triangulaires, cas d'égalité dans la première inégalité triangulaire.

- Exponentielle imaginaire.
 - Définition
 - Caractérisation des complexes de module 1.
 - Propriétés :
 - ✓ égalité de deux exponentielles imaginaires
 - ✓ exponentielle imaginaire d'une somme d'arguments, de l'opposé d'un argument
 - ✓ formules de Moivre, d'Euler, identités du losange.
- La forme trigonométrique et les arguments d'un nombre complexe non nul :
 - Définition (géométrique) d'un argument d'un complexe non nul
 - Forme trigonométrique d'un complexe non nul : existence et unicité.
 - Caractérisation de l'égalité de deux complexes non nuls.
 - Forme quasi-trigonométrique
 - Propriétés des arguments : $\arg(zz')$, $\arg\left(\frac{1}{z}\right)$, $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)$, $\arg(z^n)$ où $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(\bar{z})$.
- Applications « algébriques »
 - Identité du losange généralisé : $e^{i\theta} + e^{i\theta'} \text{ et } e^{i\theta} - e^{i\theta'}$.
 - Quotient et puissance de complexes
 - Linéariser un produit de sinus et cosinus
 - Calcul de $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$, $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.
- Applications « géométriques »
 - Distance entre deux points. Description par les complexes d'un cercle et d'une médiatrice.
 - Angle entre deux vecteurs. Description par les complexes de l'alignement, d'un cercle de diamètre connu.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

Enoncer et démontrer les résultats suivants:

1) La formule d'addition de la fonction tangente.

2) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \frac{z+\bar{z}'}{2} = \operatorname{Re}(z) \text{ et } \frac{z-\bar{z}'}{2i} = \operatorname{Im}(z), \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' \text{ et } \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' \text{ et si } z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$

3) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z \times z'| = |z| \times |z'| \text{ et si } z \neq 0, \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}.$

4) Les deux inégalités triangulaires: $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'||| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|.$

5) Formule d'Euler et identités du losange.

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.