

PROGRAMME DE COLLE

SEMAINE 2

CHAPITRE 1 : Calculs dans $\mathbb{R}$. Cf programme précédent.

CHAPITRE 2 : Récurrences-Sommes et Produits finis.

I. Théorèmes de récurrence Simple – Double – Forte .

II. Sommes et produits finis

- Sommes finies
 - Notation d'une somme finie.
 - Propriétés des sommes : découpage, séparation, mise en facteur.
 - Changement d'indices.
 - Ecriture de u_n en fonction de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et S_{n-1} .
 - Somme télescopique $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)$ et plus généralement, $\sum_{k=p}^N (u_k - u_{k+1})$.
 - Application au calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et autres sommes « rationnelles ».
- Produits finis
 - Notation produit fini.
 - Propriétés des produits : découpage, séparation.
 - Changement d'indices.
 - Produit télescopique $\prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k}$.
 - Ecriture de u_n en fonction de $P_n = \prod_{k=0}^n u_k$ et P_{n-1} .
- Généralisation de formules rencontrées
 - $\forall k, a_k \leq b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \leq \dots$
 - $|\prod_{k=1}^n a_k| = \dots, |\sum_{k=1}^n a_k| \leq \dots$
 - $\sqrt{\prod_{k=1}^n a_k} = \dots, \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \dots$
 - $\ln(\prod_{k=1}^n a_k) = \dots$ et $e^{\sum_{k=1}^n a_k} = \dots$.
- Sommes doubles
 - Notation d'une somme double et finie.
 - Théorème d'interversion de deux sommes finies.
 - Produit de deux sommes simples et finies.

III. Formules sommatoires

- Somme
 - des entiers compris entre 1 et n
 - des « entiers au carré »
- Somme géométrique.
 - Factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$
 - Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
 - Formules des sommes géométriques : $\sum_{k=0}^n x^k$ et $\sum_{k=p}^n x^k$.
 - Application au calcul de $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$
- Formule du binôme de Newton
 - Définition d'une factorielle, d'un coefficient binomial.
 - Propriétés des factorielles et des coefficients binomiaux. Valeurs particulières.
 - Formule de Pascal. Triangle de pascal.
 - Formule du binôme de Newton.

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus. Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaître :

- 1) Enoncer et démontrer les deux inégalités triangulaires et la généralisation de la première inégalité.
- 2) Enoncer et démontrer les formules donnant $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k^2$.
- 3) Enoncer et démontrer la formule de factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$ et celle des sommes géométriques $\sum_{k=0}^n x^k$ et $(\sum_{k=p}^n x^k)$.
- 4) Enoncer et démontrer la formule de Pascal.

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer